Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ
Φυλλάδιο ασκήσεων 4
Ασκήσεις στην ομοιόμορφη σύγκλιση

3 Μαρτίου 2010

1. Δείξτε οτι $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ για $x \in I \subset \mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid\right) = 0$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} f_n(x) \rightrightarrows f(x) &\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N, x \in I \ : \mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N, : \sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon \\ &\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid = 0 \end{aligned}$$

2. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = max(n - n^2 \mid x - \frac{1}{n} \mid, 0)$, $f_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$.
(α) Σχεδιάστε τους πρώτους n όρους της ακολουθίας.
(β) Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει στην $f(x) = 0$.
(γ) Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη, ναι ή όχι και γιατί.

Απάντηση: (β) Απο τον ορισμό $f_n(0) = 0$ για κάθε n. Για $0 < x \leq 1$ υπάρχει N με $\frac{2}{N} \geq x$ έτσι ώστε για $n \geq N$ να έχουμε $f_n(x) = 0$ συνεπώς $f_n(x) \to 0$ σημειακά.
(γ) Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Για να το δείτε αυτό πάρετε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$ και εφαρμόστε το κριτήριο της άσκησης 1.

3. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 2\,n\,x & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2\,n\,x & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει στην $f(x) = 0$ αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Απάντηση: Πάρετε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{2n}$ και εφαρμόστε το κριτήριο της άσκησης 1.

4. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δειξτε οτι $f_n(x) \rightrightarrows 0$.

Απάντηση: Εφαρμόστε το κριτήριο της άσκησης 1.

5. Δέιξτε οτι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{sin(j\,x)}{j^2}$ συγκλίνει απόλυτα για $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Αν $f_j(x) = \frac{sin(j\,x)}{j^2}$ έχουμε ότι $\mid f_j(x) \mid < M_j := \frac{1}{j^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $\sum_{j=1}^{\infty} M_j < \infty$ απο το κριτήριο του Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

6. Έστω η καμπύλη $r(t) = (tcost, tsint)$. Να βρεθεί ενα εφαπτόμενο διάνυσμα και η εξίσωση της εφαπτομένης για $t = \frac{\pi}{3}$.
   Απάντηση: $r'(t) = (cost - tsint, sint + tcost)$ και για $t = \frac{\pi}{3}$, έχουμε $r'(\frac{\pi}{3}) = (\frac{3-3\pi\sqrt{3}}{6}, \frac{3\sqrt{3}+\pi}{6})$
   Εφαπτομένη: $y - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = (\frac{3\sqrt{3}+\pi}{3-3\pi\sqrt{3}})(x - \frac{\pi}{6})$

7. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{t^2+1}i + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}j, \quad r(0) = i + j$$

   Απάντηση: Ολοκληρώνουμε κατα μέλη και παίρνουμε $r(t) = (Arctant + 1, \sqrt{t^2+1})$

8. Ενα σώμα κινείται πανω στην καμπύλη $r(t) = (1 - cost, t - sint)$. Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το σώμα απο $t = 0$ έως $t = \frac{2\pi}{3}$.
   Απάντηση:Χρησιμοποιόντας τον τύπο του μήκους τόξου, παίρνουμε $l = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2 - 2cost}dt = \ldots = 2$

9. Εαν ισχύει $|r(t)| = c$ να δείξετε οτι $r(t)r'(t) = 0$
   Απάντηση:$|r(t)| = c \Leftrightarrow |r(t)|^2 = c^2 \Leftrightarrow (r(t))^2 = c^2$ Παραγωγίζω: $r'(t)r(t) = 0$