Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ
Φυλλάδιο ασκήσεων 10

1 Ιουνίου 2010

1. α) Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_u f(x_0)$ της συνάρτησης $f(x,y) = xy + 4sin(x)$ στο σημείο $x_0 = (0,1)$ κατα την κατεύθυνση του διανύσματος $u = (3,4)$
β)Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_u f(1,-1,2)$ της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2y^2 + z(x+y)$ στο σημείο $A = (1,-1,2)$ κατα την κατεύθυνση του διανύσματος $u = \frac{1}{5}(0,3,4)$.
Τι συμπέρασμα βγαίνει απο το αποτέλεσμα;
Απάντηση
α)
$$D_u f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,1) + t(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}))}{t} = \frac{6}{5}$$
β)
$$D_u f(x_A) = \vec{\nabla} f \hat{u} = (4,0,0)(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 0$$
Άρα το διάνυσμα είναι κάθετο στην κλίση.

2. Εαν $f(x,y) = e^{xy^2}$ και $x = x(t) = tcos(t), \quad y = y(t) = tsin(t)$ υπολογίστε την ολική παράγωγο $\frac{df}{dt}$ στο σημείο $t = \frac{\pi}{2}$
Απάντηση
$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$
Αντικαθιστούμε για $t = \frac{\pi}{2}$, και παίρνουμε $\frac{df}{dt}\mid_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^3}{8}$

3. Να εξεταστούν οι παρακάτω συναρτήσεις για μέγιστες - ελάχιστες τιμές:
α) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$
β) $g(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$
Απάντηση
α) Ελάχιστο για $x = 2, y = -3$
β) Μέγιστο για $x = -1, y = -1$. Σαγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων.

4. Να βρεθούν τα ολικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $z = f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που φράσσεται απο τις ευθείες $x = 0, y = 2, y = 2x$ στο 1ο τεταρτημόριο.
Απάντηση
Ολικό μέγιστο στην αρχή των αξόνων, ίσο με 1. Ολικό ελάχιστο στο σημείο Α(1, 2) ίσο με -5.

5. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20$.
Απάντηση
Μέγιστο στο Α(-1, -2). Ελάχιστο στο Β(1,2).

6. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δεδομένου όγκου V, ανοιχτό απο πάνω. Βρείτε ποιές θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε το συνολικό εμβαδό των πλευρών του να είναι ελάχιστο.
Απάντηση
$x = y = \sqrt[3]{2V}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}$

7. α) Η θερμοκρασία των σημείων του χώρου ορίζεται απο την συνάρτηση $T(x, y, z) = x^2 - y - 2z$.
Ένα πτηνό που βρίσκεται στο σημείο $A(1, 2, 1)$ πετάει προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$ με την ελπίδα οτι θα ζεσταθεί. Είναι οι ελπίδες του βάσιμες;
β)Η θερμοκρασία των σημείων του χώρου ορίζεται απο την συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 y + yz - e^{xy}$. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο P(1, 1, 1) ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{PO}$, όπου O η αρχή των αξόνων. Να βρεθεί η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο P.
Απάντηση
α) Ναι, γιατι το διάνυσμα u είναι στην κατεύθυνση της κλίσης σε εκείνο το σημείο.
β) Είναι η παράγωγος προς την κατεύθυνση του $\vec{PO}$, ίση με $\frac{2e-5}{\sqrt{3}}$. Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο P είναι προς την κατεύθυνση της κλίσης, $\nabla f = (2 - e, 2 - e, 1)$.