Ακολουθίες συναρτήσεων
Α. Ν. Γιαννακόπουλος,
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

1 Εισαγωγή

Στη διάλεξη αυτή θα μελετήσουμε την έννοια της σύγκλισης ακολουθίων συναρτήσεων και συγκεκριμένα την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πολύ χρήσιμη έννοια γιατί μας επιτρέπει να μεταφέρουμε ιδιότητες όπως π.χ. η συνέχεια απο κάθε όρο της ακολουθίας στο όριο της ακολουθίας.

Επίσης, η ομοιόμορφη σύγκλιση μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε και να ολοκληρώνουμε συναρτήσεις που ορίζονται με την μορφή σειράς, όρο κατά όρο, διευκολύνοντας έτσι, όποτε ισχύει, το χειρισμό αυτών των συναρτήσεων.

2 Ακολουθίες συναρτήσεων και σημειακή σύγκλιση

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία ο κάθε όρος της οποίας εξαρτάται απο μία παράμετρο x. Μπορούμε να θεωρήσουμε δηλαδή την ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ο κάθε όρος της οποίας είναι μία συνάρτηση του $x \in I \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε και μία συνάρτηση $f_n(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.1 *Ας πάρουμε την οικογένεια συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Π.χ. για $n = 1$ η $f_1(x) = x$, για $n = 2$ η $f_2(x) = x^2$, κ.ο.κ. Μεταβάλλοντας λοιπόν το n παίρνουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Οι πρώτες 8 απο τις συναρτήσεις αυτές φαίνονται στα σχήματα* **;;** *και* **;;**.

Ορισμός 2.1 *Λεμε ότι η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$* **συγκλίνει** *στην συνάρτηση $f(x)$ (σημειακά) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ (εν γένει $N = N(x,\epsilon)$) τέτοιο ώστε $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$ για $n > N$.*

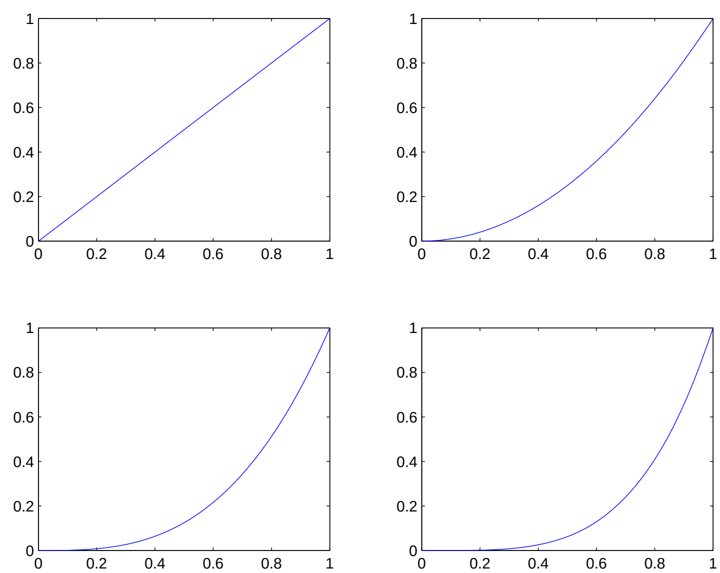
Παράδειγμα 2.2 *Η ακολουθία $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ συγκλίνει στην συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

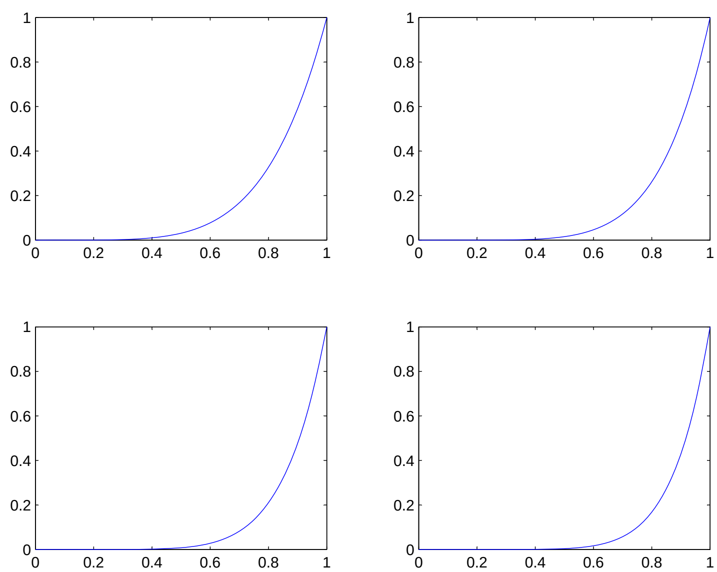
Παράδειγμα 2.3 *Η ακολουθία $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$ συγκλίνει στην συνάρτηση $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Οι πρώτες 8 απο τις συναρτήσεις αυτές φαίνονται στα σχήματα* **;;** *και* **;;**.

Γιατί χρειαζόμαστε τις ακολουθίες συναρτήσεων; Για πολλούς λόγους, όπως θα δείτε στο σύντομο μέλλον, αλλά ας αρκεστούμε εδώ να δώσουμε έναν απο αυτούς.

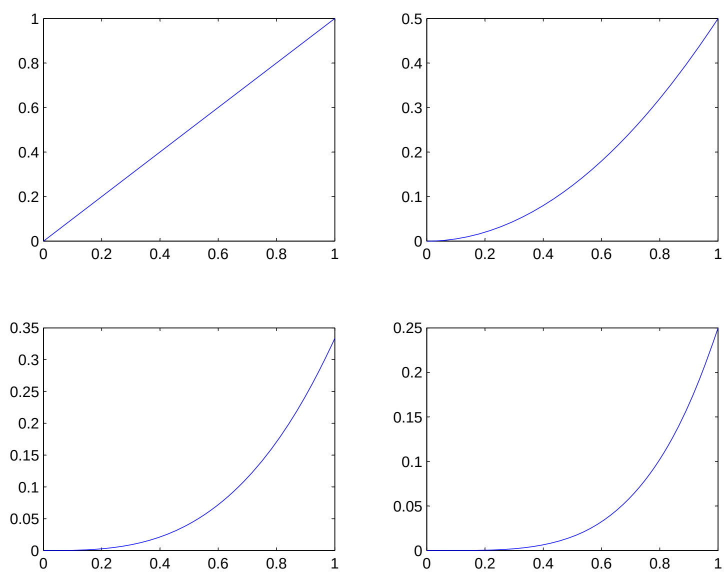
Όπως έχετε δεί πολλές συναρτήσεις μπορούν να γραφούν σαν δυναμοσειρές κάνοντας χρήση π.χ. του αναπτύγματος Taylor. Π.χ. $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$. Ένας τρόπος να δείτε αυτή τη σειρά είναι να ορίσετε τα μερικά αθροίσματα $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ και τότε η σειρά μπορεί να γραφεί ως $f(x) = \lim_{n\to} f_n(x)$. Συνεπώς το άθροισμα της σειράς μπορεί να εκφραστεί σαν το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων.



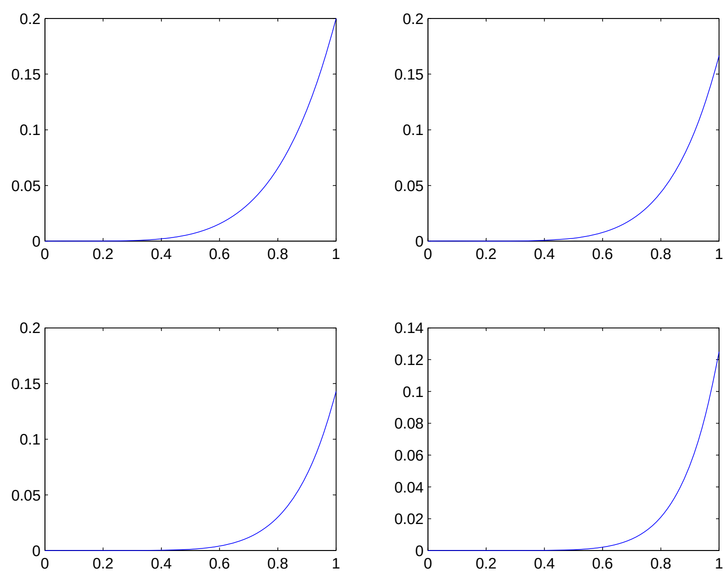
Σχήμα 1: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = x^n$, ν=1,2,3,4



Σχήμα 2: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = x^n$, ν=5,6,7,8



Σχήμα 3: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = x^n/n$, ν=1,2,3,4



Σχήμα 4: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = x^n/n$, ν=5,6,7,8

3 Προβλήματα της σημειακής σύγκλισης

Ας παρουμε το παράδειγμα **;;**. Παρατηρούμε ότι ενώ οι συναρτήσεις $f_n(x) = x^n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x, για $x \in [0,1]$, η συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to} f_n(x)$ **δεν** είναι συνεχής συνάρτηση στο $x = 1$! Συνεπώς, η ιδιότητα της συνέχειας **δεν** μεταφέρεται στο όριο!

Αυτό είναι μία ενοχλητική παρατήρηση η οποία δυστυχώς συμβαίνει αρκετά συχνά.

Παράδειγμα 3.1 *Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = (1-x^2)^n$, $x \in [-1,1]$. Βλέπουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πάλι το ίδιο φαινόμενο.

> **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να διατηρήσει την ιδιότητα της συνέχειας.**

Τα προβλήματα όμως δεν σταματούν εδώ!

Παράδειγμα 3.2 *Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Ας πάρουμε τώρα τις παραγώγους των $f_n(x)$,*

$$f_n'(x) = x^{n-1}$$

Βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \neq f'(x) = 0, \;\; x \in [0,1]$$

Συνεπώς, βλέπουμε και ότι

> **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της παραγώγισης.**

Και δυστυχώς τα προβλήματα δεν σταματούν εδώ!

Παράδειγμα 3.3 *Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4\,n^2\,x & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ -4\,n^2\,x + 4\,n & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Προσπαθήστε να σχεδιάσετε τις 4 πρώτες απο τις συναρτήσεις αυτές.

Μπορούμε να δούμε μετά απο πράξεις ότι

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1, \;\; n \in \mathbb{N}$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (εφόσον $f_n(x) = 0$ στο $x = 0$ για κάθε n, και $f_n(x) = 0$ για n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} < x$).
Συνεπώς,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

Αυτό είναι ιδιαίτερα ενοχλητικό, γιατί π.χ οι $f_n(x)$ μπορεί να ερμηνευθούν σαν μία ακολουθία συναρτήσεων κατανομών κάποιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών, αλλά το όριο τους όχι!

Συνεπώς, βλέπουμε και ότι

> **Η σημειακή σύγκλιση δεν είναι επαρκής για να μας επιτρέψει την εναλλαγή της πράξης του ορίου με την πράξη της ολοκλήρωσης.**

Πρέπει λοιπόν να ορίσουμε μία πιο ισχυρή μορφή σύγκλισης η οποία και θα μας επιτρέπει να επιλύσουμε τα προβλήματα αυτά.

4 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Στην σημειακή σύγλιση είδαμε ότι το $N = N(x,\epsilon)$. Τα προβλήματα μας μπορεί να λυθουν αν υποθέσουμε ότι το N εξαρτάται απο το ϵ αλλά **όχι** απο το x! Δηλαδή $N = N(\epsilon)$ και συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε το ίδιο N για κάθε $x \in I$. Εφόσον συμβαίνει αυτό λέμε ότι η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$.

Ορισμός 4.1 *Η ακολουθία $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$* **συγκλίνει ομοιόμορφα** *στην συνάρτηση $f(x)$ και συμβολίζουμε $f_n(x) \overset{\rightarrow}{\to} f(x)$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ και για κάθε $x \in I$ να ισχύει $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$.*

Παράδειγμα 4.1 *Η ακολουθία $f_n(x) = x^n$* **δεν** *συγκλίνει ομοιόμορφα στη*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

στο $I = [0,1]$. Αυτό γιατί για να ισχύει ότι $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$ για δεδομένο ϵ θα πρέπει να ισχύει

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

. Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να βρούμε ένα N το οποίο να είναι τέτοιο ώστε $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$ για $n > N$ και το N αυτό να εξαρτάται μόνο απο το ϵ, αν το x παίρνει τιμές κοντά στο $x = 1$.

Παράδειγμα 4.2 *Η ακολουθία $f_n = \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x) = 0$ στο $[0,1]$. Παρατηρούμε ότι*

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \le \frac{1}{n}, \ \ \forall x \in [0,1], \ \ n \in \mathbb{N}$$

συνεπώς για κάθε $x \in [0,1]$ μπορούμε να επιλέξουμε το ίδιο $N > \frac{1}{\epsilon}$.

Πρόταση 4.1 *Η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ αν και μόνο αν ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x \in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid \right) = 0$$

Παράδειγμα 4.3 *Η ακολουθία συναρτήσεων*

$$f_n(x) = \begin{cases} 2\,n\,x & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2 - 2\,n\,x & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

συγκλίνει σημειακά στην $f(x) = 0$ στο $I = [0,1]$ αλλά όχι ομοιόμορφα. Για να το δείτε αυτό πάρετε την $x_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\mid f_n(x_n) - f(x_n) \mid = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνεπώς η $f_n(x)$ δεν μπορεί να συγκλίνει ομοιόμορφα.

Παράδειγμα 4.4 *Ας πάρουμε την ακολουθία $f_n(x) = x^n$. Ένας τρόπος να δείτε ότι η ακολουθία αυτή δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x) = 0$ είναι να επιλέξετε την ακολουθία $x_n = \frac{n+1}{n}$ και να δείτε οτι το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει.*

5 Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Η ομοιόμορφη σύγκλιση μας εξασφαλίζει την διατήρηση της ιδιότητας της συνέχειας στο όριο

Πρόταση 5.1 *Έστω $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία συνεχων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Τότε, η $f(x)$ είναι συνεχής στο I.*

Με άλλα λόγια μας επιτρέπεται να γράψουμε

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Απόδειξη: Αυτο που ζητάμε να δείξουμε είναι ότι για κάθε $x \in I$, και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$| f(y) - f(x) | < \epsilon$ αν $| x - y | < \delta$.

Ας επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $x \in I$ και ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.

Εφόσον η $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ ισχύει ότι μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in I$ αν $n \geq N$ να ισχύει

$$| f_n(z) - f(z) | < \frac{\epsilon}{3}$$

Η $f_N(x)$ είναι συνεχής στο I, συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in I$ να ισχύει

$$| f_N(x) - f_N(y) | < \frac{\epsilon}{3}$$

για καθε $y \in I$ τέτοιο ώστε $| x - y | < \delta$.

Άρα, για κάθε $y \in I$ τέτοιο ώστε $| x - y | < \delta$ ισχύει

$$\begin{aligned} | f(x) - f(y) | &\leq | f(x) - f_N(x) | + | f_N(x) - f_N(y) | + | f_N(y) - f(y) | \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

οπότε αποδείχθηκε και η συνέχεια της f. □

6 Ομοιόμορφη συνέχεια και ολοκλήρωση

Πρόταση 6.1 *Έστω $f_n(x)$ μία ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ για $x \in I = [a, b]$. Αν κάθε όρος της ακολουθίας $f_n(x)$ είναι ολοκληρώσιμος στο I τότε και η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο I και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Απόδειξη: Αφήνεται σαν άσκηση. □

7 Ομοιόμορφη συνέχεια και παραγώγιση

Πρόταση 7.1 *Έστω ότι το I είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = [a, b]$ και $f_n(x)$ μία ακολουθία συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων.*
Ας υποθέσουμε ότι

1. *Υπάρχει κάποιο $z \in I$ τέτοιο ώστε η $f_n(z)$ να συγκλίνει*
2. *Η ακολουθία $f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I*

Τότε, η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I σε μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε ότι

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \ \ \forall x \in I$$

Απόδειξη: Η αποδειξη παραλείπεται. □

8 Σειρές συναρτήσεων και ομοιόμορφη σύγκλιση

Θα ασχοληθούμε τώρα με σειρές συναρτήσεων της μορφής

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$$

Είδαμε ότι αν πάρουμε τα μερικά αθροίσματα $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ μπορούμε να δούμε το πρόβλημα της σύγκλισης της σειράς αυτής σαν το πρόβλημα της σύγκλισης της ακολουθιας συναρτήσεων $S_n(x)$ καθώς $n \to \infty$.

Ορισμός 8.1 *Θα λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$ για $x \in I$ αν η ακολουθία συναρτήσεων $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$.*

Ένα απο τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν θα είναι να βρούμε συνθήκες κάτω απο τις οποίες η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πρόταση 8.1 *(***Το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass** *)*
Ας υποθέσουμε οτι υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών αριθμών M_j τέτοιων ώστε $| f_j(x) | \leq M_j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in I$ και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ συγκλίνει.
Τότε, η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Απόδειξη: Έστω οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Εφόσον η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n > m \geq N$ να ισχύει

$$M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots M_n < \frac{\epsilon}{2}$$

Για κάθε $x \in I$ ισχύει τότε ότι

$$| f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x) | \leq | f_{m+1}(x) | + \cdots + | f_n(x) | \leq M_{m+1} + \cdots + M_n < \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ στο I.
Παρατηρείστε ότι

$$f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x) = S_n(x) - S_m(x)$$

οπότε η (;;) μας εξασφαλίζει ότι η $S_n(x)$ είναι Cauchy για κάθε $x \in I$, συνεπώς υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ σημειακά. Θα δειξουμε ότι η σύγκλιση της $S_n(x)$ είναι και ομοιόμορφη στο I.
Έστω $x \in I$ και $m \geq N$. Τότε,

$$| S_m(x) - f(x) | = | \sum_{j=1}^{m} f_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) | = | \sum_{j=m+1}^{\infty} f_j(x) | = \lim_{n\to\infty} | \sum_{j=m+1}^{n} f_j(x) | \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in I$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ (ανεξάρτητο του x) τέτοιο ώστε αν $m \geq N$ να ισχύει $| S_m(x) - f(x) | < \epsilon$ άρα η $S_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ στο I. $\square$

Παράδειγμα 8.1 *Η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ στο διάστημα $-a \leq x \leq a$ αν $0 < a < 1$.*

Πραγματικά, η σειρά αυτή ικανοποιεί το κριτήριο του Weierstrass με $M_j = a^j$. Μετά αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά μας αποτελέσματα απο τις γεωμετρικές σειρές.

Παράδειγμα 8.2 *Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(j\,x)}{j^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για x στο διάστημα $[-R, R]$ για κάθε $R \in \mathbb{R}$.*

Πραγματικά, η σειρά αυτή ικανοποιεί το κριτήριο του Weierstrass με $M_j = \frac{1}{j^2}$.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων μας επιτρέπει το να τις ολοκληρώσουμε όρο προς όρο.

Πρόταση 8.2 *Έστω $f_n(x)$ μία ακολουθία συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $I = [a, b]$.*
Αν η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $f(x)$ στο I τότε η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο I και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με την χρήση της Πρότασης **;;**. $\square$

Παράδειγμα 8.3 *Κάνοντας χρήση της Προτασης ;; υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int_0^1 e^x\,dx$.

Δείξτε πρώτα ότι η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα* $[0,1]$. *Μετά ολοκληρώστε την σειρά όρο προς όρο και ξαναθροίσετε.*

Πρόταση 8.3 *Έστω* $f_n(x)$ *μία σειρά διαφορίσιμων συναρτήσεων στο* $I = (a,b)$.
Υποθέστε ότι

1. $f_n'(x)$ *συνεχείς στο* (a,b)
2. *Η σειρά* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ *συγκλίνει σημειακά σε μία συνάρτηση* $f(x)$ *στο* (a,b)
3. *Η σειρά* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* (a,b).

Τότε, η $f(x)$ *είναι διαφορίσιμη στο* (a,b) *και*

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

9 Εφαρμογές στις δυναμοσειρές

Ορισμός 9.1 *Μία σειρά της μορφής* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(x-t)^j$ *ονομάζεται* **δυναμοσειρά**.

Γνωρίζουμε ότι για τις δυναμοσειρές υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός R τέτοιος ώστε η σειρά να συγκλίνει απόλυτα αν $| x - t | < R$ και να αποκλίνει αν $| x - t | > R$. Ο αριθμός R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Πρόταση 9.1 *Έστω* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-t)^j$ *μία δυναμοσειρά και* R *η ακτίνα σύγκλισης της.*
Αν $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-t)^j$ *για* $| x - t | < R$ *τότε*

1. *Αν* $0 < S < R$ *η σύγκλιση της δυναμοσειράς στην* $f(x)$ *είναι ομοιόμορφη στο διάστημα* $[t-S, t+S]$
2. *Η* $f(x)$ *είναι συνεχής στο* $[t-S, t+S]$
3. *Αν* $a, b \in (t-R, t+R)$ *τότε η* $f(x)$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$, *η σειρά* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, b_j$ *όπου* $b_j = \int_a^b (x-t)^j\,dx$ *συγκλίνει και*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_a^b (x-t)^j\,dx$$
4. *Η* $f(x)$ *είναι διαφορίσιμη στο* $(t-R, t+R)$, *η* $\sum_{j=1}^{\infty} j\, a_j\,(x-t)^{j-1}$ *συγκλίνει απόλυτα αν* $| x - t | < R$ *και*
$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, a_j\,(x-t)^{j-1}, \;\; | x - t | < R$$

Παράδειγμα 9.1 *Ας θεωρήσουμε την γεωμετρική σειρά*

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x}, \;\; | x | < 1$$

Αν $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $t = 0$ *και* $a_j = (-1)^j$ *η παραπάνω πρόταση μας δίνει ότι*

$$-1 + 2\,x - 3\,x^2 + \cdots = f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \;\; | x | < 1$$

καθώς και ότι

$$\int_0^b f(x)\,dx = \ln(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}\,b^j}{j}, \;\; | b | 1$$

Πρόταση 9.2 (Σειρές Taylor)
Ας υποθέσουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(x-t)^j$ *έχει ακτίνα σύγκλισης* R *και έστω* $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(x-t)^j$, $\mid x-t \mid < R$.
Τότε,

$$a_j = \frac{f^{(j)}(t)}{j!}$$

και συνεπώς

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j, \ \ \mid x-t \mid < R$$

όπου με $f^{(j)}(t)$ *συμβολίζουμε την* j *παράγωγο της* $f(x)$ *υπολογισμένη στο* $x=t$, *δηλαδή* $f^{(j)}(t) = \frac{d^j f}{dx^j}(x=t)$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε m φορές την Προταση **;;** (4) και καταλήγουμε στο ότι

$$f^{(m)}(x) = \sum_{j=m}^{\infty} j\,(j-1)\,(j-2)\cdots(j-m+1)\,a_j\,(x-t)^{j-m}, \ \ \mid x-t \mid < R$$

Θέτουμε τώρα $x=t$ και βλέπουμε ότι στο άθροισμα αυτό συνεισφέρει μόνο ο όρος $j=m$, συνεπώς

$$f^{(m)}(t) = a_j\,m!$$

απο όπου και καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.□

Παράδειγμα 9.2 *Δείξτε ότι* $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ *χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor.*