Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 7-11-11
Μ. Ζαζάνης

1 Υπακολουθίες

Θεώρημα 1. *Αν $\{x_n\}$ είναι πραγματική ακολουθία που συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$ και $\{x_{n_k}\}$ μια υπακολουθία της, τότε $x_{n_k} \to l$ όταν $k \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένο. Αφού $x_n \to l$, υπάρχει N τέτοιο ώστε $n \geq N$ συνεπάγεται $|x_n - l| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Επίσης, αφού n_k είναι μια αυστηρώς αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, $n_N \geq N$ και επομένως $|x_{n_k} - l| < \epsilon$ για $k \geq N$. ∎

Πόρισμα 1. *Αν μια ακολουθία έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει. Ομοίως, αν μια ακολουθία έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει.*

Θεώρημα 2. *Κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ έχει μια μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μια υπακολουθία η οποία να είναι είτε αύξουσα, είτε φθίνουσα. Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε την ακολουθία των συνόλων $A_m := \{x_n : n > m\}$, $m = 1, 2, \ldots$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Τα A_m έχουν μέγιστο στοιχείο για κάθε m. Σ' αυτή την περίπτωση διαλέγω το n_1 έτσι ώστε $x_{n_1} = \max\{x_n : n > 1\}$, διαλέγω το n_2 έτσι ώστε $x_{n_2} = \max\{x_n : n > n_1\}$, και γενικά το n_{k+1} έτσι ώστε $x_{n_{k+1}} = \max\{x_n : n > n_k\}$. Αφού το maximum για τον προσδιορισμό του x_{n_k+1} λαμβάνεται σε ένα υποσύνολο του συνόλου πάνω στο οποίο υπολογίζεται το maximum για το x_{n_k}, θα ισχύει $x_{n_{k+1}} \leq x_{n_k}$ και συνεπώς η υπακολουθία $\{x_{n_k}\}$ είναι *φθίνουσα*.

(ii) Υπάρχει m τέτοιο ώστε το A_m να μην έχει μέγιστο στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε στοιχείο x_n του συνόλου $\{x_n : n \geq m\}$ υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο $x_{n'}$ με $x_{n'} > x_n$. Διαλέγω λοιπόν $n_1 = m + 1$ και n_2 τον πρώτο φυσικό μεγαλύτερο από το $m + 1$ για τον οποίο $x_{n_2} > x_{m+1}$. Κατόπιν, n_3 τον μικρότερο φυσικό μετά τον n_2 για τον οποίο $x_{n_3} > x_{n_2}$ κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία δεν τελειώνει, άλλως το A_m θα είχε μέγιστο στοιχείο. Συνεπώς έτσι κατασκευάζω μια *αύξουσα* ακολουθία. ∎

Θεώρημα 3 (Bolzano–Weierstraß). *Κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Βάσει του προηγουμένου θεωρήματος, η $\{x_n\}$ έχει μια μονότονη υπακολουθία. Αυτή είναι επιπλέον και φραγμένη λόγω της υποθέσεως και συνεπώς συγκλίνει. ∎