

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= E\left\{ (X - E(X))(Y - E(Y)) \right\} \checkmark = \\
 &= E\left[XY - X \cdot E(Y) - E(X) \cdot Y + E(X) \cdot E(Y) \right] = \\
 &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) = \\
 &= E(X \cdot Y) - 2E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) = \\
 &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ N.S.O. } E(X-\mu)^4 = E(X^4) - 4[E(X^3) \cdot E(X)] + 6[E(X)]^2 \cdot E(X^2) - 3[E(X)]^4$$

Ξεκινάμε από το 1^ο μέλος κι αναπτύσσουμε:

$$\begin{aligned} E(X-\mu)^4 &= E[(X-\mu)^3 \cdot (X-\mu)] = E[(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)(X-\mu)] = \\ &= E[X^4 - \mu X^3 - 3X^3\mu + \underbrace{3X^2\mu^2} + \underbrace{3X^2\mu^2} - 3X\mu^3 - \mu^3X + \mu^4] = \\ &= E(X^4) - \mu E(X^3) - 3E(X^3) \cdot \mu + 6 \cdot E(X^2) \cdot \mu^2 - 3E(X) \cdot \mu^3 - \mu^3 E(X) + \mu^4 \\ &= E(X^4) - E(X) \cdot E(X^3) - 3E(X^3) \cdot E(X) + 6 \cdot E(X^2) \cdot [E(X)]^2 - \\ &\quad - 3E(X) \cdot [E(X)]^3 - [E(X)]^3 \cdot E(X) + [E(X)]^4 = \\ &= E(X^4) - 4 \cdot E(X) \cdot E(X^3) + 6E(X^2) \cdot [E(X)]^2 - \underbrace{4E(X) \cdot [E(X)]^3 + [E(X)]^4}_{[E(X)]^4} = \\ &= E(X^4) - 4E(X^3) \cdot E(X) + 6[E(X)]^2 \cdot E(X^2) - 4[E(X)]^4 + [E(X)]^4 = \\ &= E(X^4) - 4E(X^3) \cdot E(X) + 6[E(X)]^2 \cdot E(X^2) - 3[E(X)]^4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Θεώρημα : Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. μεγέθους n από έναν πληθυσμό με μέση τιμή $E(X_i) = \mu$ και διακύμανση $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Τότε ν.δ.ο. ισχύουν τα ακόλουθα :

$$(i) E(\bar{X}) = \mu, \quad (ii) \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{και} \quad (iii) E(S^2) = \sigma^2$$

$S^2 \equiv$ η δειγματική διακύμανση

Πράγματι, θα έχουμε:

Θα για το (i) :

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu \quad (1) \quad \checkmark$$

Θα για το (ii) :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Θα για το (iii) :

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n \left((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right)^2\right] = \leftarrow \text{προσθαφαίρω το } (\mu) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot E\left[\sum_{i=1}^n \left((X_i - \mu)^2 + (\bar{X} - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)\right)\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \cdot (n\bar{X} - n\mu) \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2}_{\sigma^2} - n \underbrace{E(\bar{X} - \mu)^2}_{\frac{\sigma^2}{n}} \right] = \quad (*) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n} \right) = \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 - \sigma^2) = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)\sigma^2 = \sigma^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Κοινός παράγοντας
(δεν εξαργύρωσε από το i)

(*) γιατί : $E(\bar{X} - \mu)^2 = E(\bar{X}^2 - 2\mu\bar{X} + \mu^2) =$
 $= E(\bar{X}^2) - 2\mu \cdot E(\bar{X}) + \mu^2 = E(\bar{X}^2) - 2\mu^2 + \mu^2$
 $= E(\bar{X}^2) - \mu^2 = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Ενώ $E(X_i - \mu)^2 = E(X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2) = E(X_i^2) - 2\mu E(X_i) + \mu^2$
 $= E(X_i^2) - \mu^2 = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 =$
 $= \text{Var}(X_i) = \sigma^2$

αλλος ρονος ... για το $E(S^2) = \sigma^2$

$$\begin{aligned}
 E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right] = \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[n \cdot E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right] = \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[n \cdot (\text{Var}(X_i) + [E(X_i)]^2) - n(\text{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2)\right] = \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[n \cdot (\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] = \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right] = \frac{1}{n-1} [(n-1)\sigma^2] = \sigma^2 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Κ.Ο.Θ.

(I) $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid με μ και σ^2
 η κάθε μία.

Αν η παρακάτω ζήτησε η τ.μ.

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \stackrel{\text{κ.π.}}{\sim} N(0,1)$$



$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

(II) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$



$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

► Θεωρούμε τ.δ. μεγέθους $n=48$ από την κατανομή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί (προσεγγιστικά) η $P(0.95 < \bar{X} < 1.05)$

Λύση

Έχουμε: $\mu = E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} (2-0) = 1$ ①

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \stackrel{①}{=} E(X^2) - 1 \quad ②$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως, } E(X^2) &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{4}{3} \quad ③ \end{aligned}$$

Άρα, ② ③ $\Rightarrow \sigma^2 = \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow \left(\sigma^2 = \frac{1}{3} \right) \checkmark$

Επομένως έχουμε $n=48, \mu=1, \sigma^2 = \frac{1}{3}$

⇒ Από το Κ.Ο.Θ.: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, δηλ. $\bar{X} \sim N\left(1, \frac{\frac{1}{3}}{48}\right)$
(αφού $n > 30$)
 $\bar{X} \sim N\left(1, \frac{1}{144}\right)$

Άρα: $P(0.95 < \bar{X} < 1.05 / \bar{X} \sim N(1, \frac{1}{144}))$

$$= P\left(\frac{0.95-1}{\frac{1}{12}} < Z < \frac{1.05-1}{\frac{1}{12}} / Z \sim N(0,1)\right) =$$

$$= P(-0.6 < Z < 0.6 / Z \sim N(0,1)) = 2 \cdot P(0 < Z < 0.6 / Z \sim N(0,1))$$

$$= 2 \cdot 0.2257 = 0.4514$$

$$\text{Ap} \times \quad P(0.95 < \bar{X} < 1.05) \simeq 0.4514 \quad \checkmark$$

Δίνεται ότι το βάρος των ατόμων ενός πληθυσμού είναι ε.μ. με κανονική κατανομή $N(70, 64)$. Αν επιλεγούν 4 άτομα τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, να βρείτε την πιθανότητα ώστε το συνολικό βάρος τους να υπερβαίνει τα 264 kg.

Λύση

Έστω $Y \equiv$ συνολικό βάρος των 4 ατόμων.

Αν X_i ε.μ. που παριστά το βάρος του κάθε ατόμου, με $X_i \sim N(\mu=70, \sigma^2=64)$, τότε θα είναι:

$$Y \equiv \sum_{i=1}^4 X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2) \equiv N(280, 256)$$

Άρα, ζητάμε την εύρεση της πιθανότητας $P(Y > 264)$.

Είναι: $P(Y > 264) = 1 - P[0 < \underbrace{Y}_{(*)} < 264] / Y \sim N(280, 256) =$

(*) Το Y παριστά δεδομένη ποσότητα

$$= 1 - P\left[\frac{-280}{16} < Z < \frac{264-280}{16}\right], \text{ με } Z \sim N(0, 1)$$

$$= 1 - P[-17.5 < Z < -1 / Z \sim N(0, 1)] = 1 - P(Z < 1 / Z \sim N(0, 1))$$

$$= 1 - 0.5 + P(0 < Z < 1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

$$\begin{aligned}\underline{E[(X_i - \bar{X})^2]} &= E\left\{[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2\right\} \\&= E[(X_i - \mu)^2 + (\bar{X} - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)] \\&= E(X_i - \mu)^2 + E(\bar{X} - \mu)^2 - 2E[(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu)] \\&= \text{Var}(X_i) + \text{Var}(\bar{X}) - 2 \text{Cov}(X_i, \bar{X})\end{aligned}$$