

Έστω Χ τ.μ. με ροήδες $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$ κ.ο.κ.

(i) Ν.δ.ο. $E(X-\mu)^3 = E(X^3) - 3[E(X^2) \cdot E(X)] + 2[E(X)]^3$

Πράγματι, ξεκινώντας από το 1^ο μέλος και αναπτύσσοντας θα έχουμε:

$$E(X-\mu)^3 = E[(X-\mu)^2 \cdot (X-\mu)] = E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \cdot (X-\mu)] =$$

$$= E(X^3 - \mu X^2 - 2\mu X^2 + 2\mu^2 X + \mu^2 X - \mu^3) =$$

$$= E(X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3) =$$

$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3 =$$

$$= E(X^3) - 3 E(X) \cdot E(X^2) + 3 (E(X))^2 \cdot E(X) - (E(X))^3 =$$

$$= E(X^3) - 3 E(X) \cdot E(X^2) + 3 \underbrace{(E(X))^3} - \underbrace{(E(X))^3} =$$

$$= E(X^3) - 3 E(X^2) \cdot E(X) + 2 (E(X))^3 \quad \checkmark$$

Κατανομή Poisson (Διακριτή).

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots, \text{ και } \lambda > 0$$

[Το όριο της διωνυμικής καθώς $n \rightarrow \infty$ και $\lambda = n \cdot p = \text{σταθ.}$ ^{αρ. υποδ/ων}]

[Εφαρ.: Όταν έχουμε γειρά τυχαίων ενδεχ. τα οποία γίνονται με την πάροδο του χρόνου και ισχύουν συγχ. προϋπ.]

- (i) Σταθ. ενδεχ. με την πάροδο του χρόνου
- (ii) Τα χρονικά διαστ. δεν επικαλύπτονται και είναι στατιστικώς ανεξάρτητα
- (iii) Η πιθαν. να συμβεί ένα τυχ. ενδεχ. είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος.

Ισοδύναμα: $P(x,t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$

Άσκηση: Ο αριθμός μη δανατηφόρων τροχαίων ανά εβδομάδα ακολουθεί $P(\lambda=1) \rightarrow$ στην Poisson;
 $\downarrow$
μέσος = 1. $\mu=1, \sigma^2=1$

(i) Ποιά η πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον ένα ατύχημα κάποια εβδομάδα;

(ii) Ποιά η πιθανότητα εντός ενός μηνός να μη συμβούν ατυχήματα;

Λύση

(i) Με δεδομένο ότι X τ.μ. που παριστά τον αριθμό των μη θανατ. ατυχημάτων ανά εβδομάδα και με $X \sim P(\lambda=1)$ θα έχουμε:

$$P(\text{τουλάχιστον ένα ατύχημα ανά εβδομάδα}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$

$$= 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} =$$

$$= 1 - e^{-1} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \checkmark$$

$$\approx 63,2\%$$

(ii) Αφού την εβδομάδα έχουμε κατά μέσο όρο 1 ατύχ. ($\lambda=1$), στο μήνα θα έχουμε: $\lambda \cdot t = 1 \cdot 4 = 4$ ατύχ. (κατά μ.ο.)
(4 εβδομ.)

↑
ανώλογο
του διαστ.

Άρα ζητάμε την πιθανότητα:

$$P(X=0) = e^{-4} \cdot \frac{4^0}{0!} = e^{-4} = \frac{1}{e^4} \approx 0,018 \text{ ή } 1,8\%$$

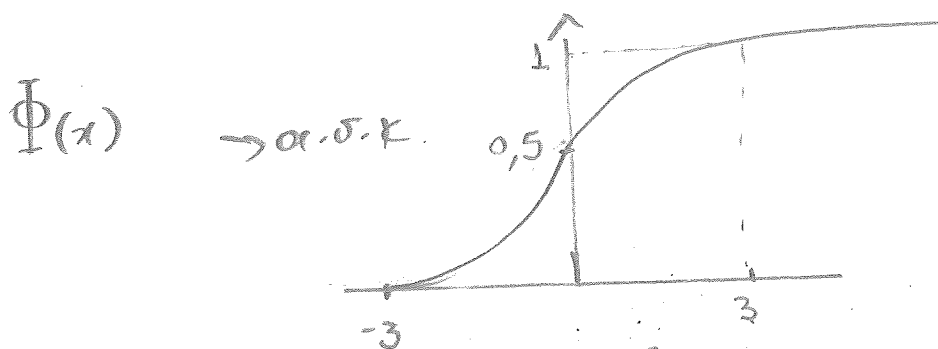
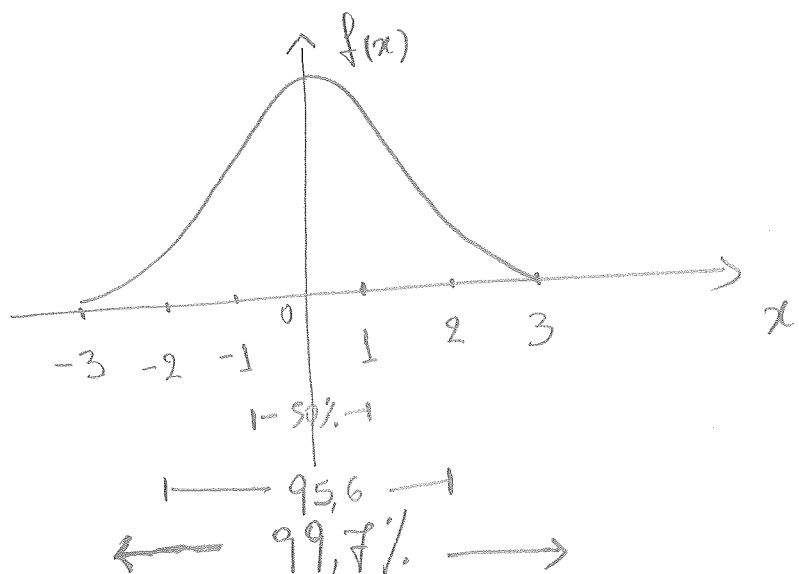
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{matrix}$$

σ.η.η.

Αν $X \sim N(0,1)$

τότε $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Προφανώς $f_X(x) > 0$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

Για την
 $N(0,1)$

$$\bar{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

Ισχύουν για τη $\Phi(x)$ οι σχέσεις:

$$\odot \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad \forall x.$$

$$\odot \quad \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} - \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt, & x \leq 0. \end{cases}$$

► Βασικό Θεώρημα (Μετασμός της Κανονικής ΓΕ)
Τυπική Κανονική

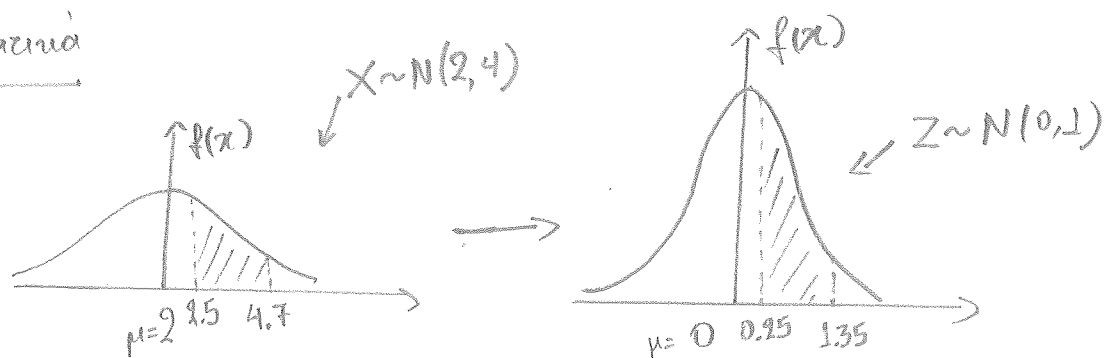
Αν $X_{\text{τυ.}}$ με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η $Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$

(i) Έστω X τ.μ. με $X \sim N(2, 4)$, δηλ. $\mu=2$ και $\sigma^2=4$.

Να υπολογιστεί η $P(2.5 < X < 4.7)$

$$\begin{aligned} \text{Θα είναι: } P(2.5 < X < 4.7) &= P\left(\frac{2.5 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{4.7 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{2.5 - 2}{2} < Z < \frac{4.7 - 2}{2}\right) = P(0.25 < Z < 1.35) \quad \underline{*} \end{aligned}$$

Σχηματικά



$$\underline{*} \quad P(0 < Z < 1.35) - P(0 < Z < 0.25)$$

$$= 0.4115 - 0.0987 = 0.3128 \quad \checkmark$$

(ii) Βρείτε αριθμό x_0 : $P(X < x_0) = 0.8$, $X \sim N(\mu=2, \sigma^2=4)$

Θα έχουμε : $P(X < x_0) = 0.8 \Leftrightarrow$

$$P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{x_0-2}{2}\right) = 0.8 \Leftrightarrow$$

$$P\left(Z < \frac{x_0-2}{2}\right) = 0.8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} + P\left(0 < Z < \frac{x_0-2}{2}\right) = 0.8 \Leftrightarrow$$

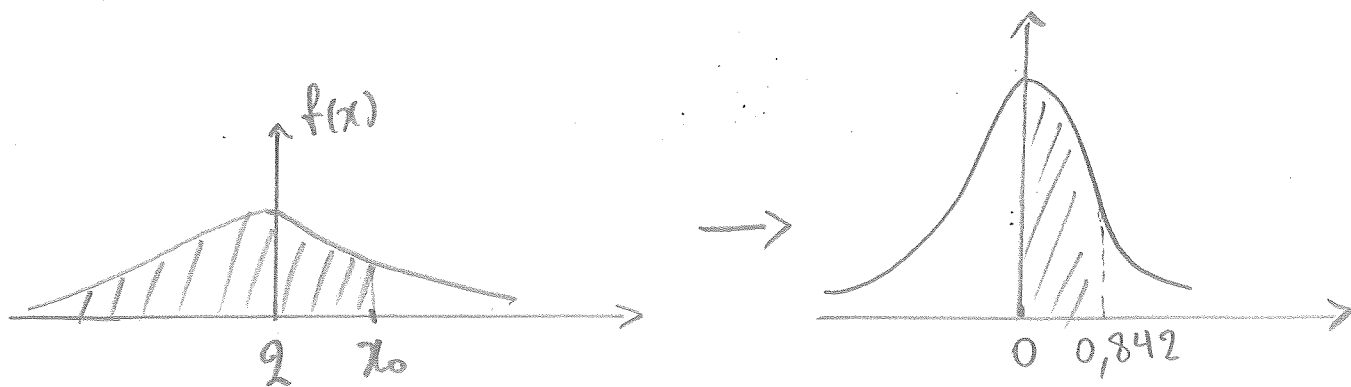
$$P\left(0 < Z < \frac{x_0-2}{2}\right) = 0.3$$

↓ Ελέγχω από τους πίνακες
σε ποιά τιμή Z αντιστοιχεί
αυτή η πιθανότητα.

Από τους πίνακες :

$$Z_\alpha = \frac{x_0-2}{2} = 0.842$$

$$\Rightarrow x_0 = 2 \times 0.842 + 2 \Rightarrow x_0 = 3.684$$



Ο χρόνος που απαιτείται για να δοθούν απαντήσεις σε ένα test ακολουθεί $N(\mu=70\text{min}, \sigma=12\text{min})$. Πότε πρέπει να τελειώσει το test, αν θέλουμε να δώσουμε αρκετό χρόνο, ώστε το 90% των υποψηφίων να προλάβουν να ολοκληρώσουν το test?

Λύση

Έστω X τ.μ. που παριστά τον απαιτούμενο χρόνο για να δοθούν οι απαντήσεις στο test, τότε:

$$X \sim N(70, 12^2)$$

Ας είναι x η χρονική στιγμή που πρέπει να τελειώσει το test, ώστε το 90% των συμμετεχόντων να το ολοκληρώσουν.

Τότε, θα είναι: $P(0 < X \leq x) = 0.9 \Leftrightarrow$

$$P\left(\frac{0-70}{12} < \frac{X-70}{12} < \frac{x-70}{12}\right) = 0.9 \Leftrightarrow$$

$$P\left(-5.833 < Z \leq \frac{x-70}{12}\right) \stackrel{Z_0}{=} 0.9, \text{ όπου } Z \sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(-5.833 < Z < 0)}_{0.5} + P\left(0 < Z \leq \frac{x-70}{12}\right) = 0.9$$

0.5

$$P(0 < Z < 5.83)$$

$$\Rightarrow P\left(0 < Z \leq \frac{x-70}{12}\right) = 0.4$$

Βλέπω από τον

→ πίνακα που αντίστοιχα

$$\text{Είναι } \frac{x-70}{12} \approx 1.28 \Rightarrow x_0 = 12 \times 1.28 + 70$$

$$\Rightarrow x_0 = 85.36 \text{ min} \checkmark$$

Οι βαθμοί σ' ένα μάθημα υποτίθεται ότι ακολουθούν (προσεγγιστικά) Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=6.5$ και τυπική απόκλιση $\sigma=0.5$ και άρα το 10. Εάν επιδεχούν τυχαία 3 μαθητές, ποιά η πιθανότητα ακριβώς 2 από τους 3 να έχουν βαθμό μεγαλύτερο από 7;

Θεωρούμε Επιτυχία, ο μαθητής που θα επιδεχτεί να έχει βαθμό > 7 .

Επειδή επιδέχουμε 3 μαθητές και θέλουμε οι 2 από αυτούς να έχουν βαθμό > 7 , τότε ζητάμε (σύμφωνα με το διωνυμικό πρότυπο) την ακόλουθη πιθανότητα:

$$\binom{3}{2} \cdot p^{2=x} \cdot (1-p)^{1=n-x=3-2} \quad (1)$$

Όμως $p = ?$

Έστω, λοιπόν, X η τ.μ. που παριστά το βαθμό στο μάθημα.

$$\text{Τότε: } X \sim N(\mu=6.5, \sigma^2=0.5^2)$$

Άρα, θα είναι $p =$ η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να έχει βαθμό > 7 . Επομένως,

$$\begin{aligned} p &= P(X > 7) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{7 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{7 - 6.5}{0.5}\right) = \\ &= P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - [0.5 + P(0 < Z < 1)] \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \quad \binom{3}{2} \cdot (0,1587)^2 \cdot (0,8413) =$$

$$= \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{\cancel{2!} \cdot 3}{\cancel{2!} \cdot 1} \cdot 0,02519 \cdot 0,8413 =$$

$$= 0,06358$$

$$\eta \ 6.36\%$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - EX \cdot EY$$

① Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \text{Corr}(X,Y)$$

↓

Δείχνει πώς σχετίζονται γραμμικά τα X και Y
(Διαγράμματα)

$$\text{με } -1 \leq \rho \leq 1$$

ΣΟ
→ Όταν X, Y ανεξάρτητες Τ.μ. και $\text{Cov}(X, Y) = 0$
Τότε $\text{Cov}(X, Y) = 0$ γιατί
 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

Έστω X, Y, Z τυχ. μεταβλητές για τις οποίες θεωρούμε ότι οι X, Z είναι ανεξάρτητα κατανομημένες τυποποιημένες τ.μ. και επιπλέον έστω ότι $Y = X^2 + Z$ (*)

N.S.O. (i) $E(Y|X) = X^2$

(ii) $\mu_Y = 1$

(iii) $E(X \cdot Y) = 0$

(iv) Παρόλο που για το ζεύγος των X, Y ο υπό συνθήκη μέσος της Y όταν δίνεται η X , εξαρτάται από τη X , το $\text{Corr}(X, Y) = 0$.

Λύση :

(i) Αφού X, Z ανεξάρτητες τ.μ. θα είναι

$$P(Z=z|X=x) = P(Z=z) \text{ και } E(Z|X) = E(Z) = 0 \quad \textcircled{1}$$

↑
για $Z \sim N(0,1)$

Άρα, θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \underline{E(Y|X)} &\stackrel{(*)}{=} E(X^2 + Z|X) = \overset{\uparrow X^2}{E(X^2|X)} + \overset{\uparrow 0}{E(Z|X)} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \\ &= \underline{X^2} + 0 = \underline{X^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 \Rightarrow E(X^2) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \Rightarrow E(X^2) = 1 + 0 \Rightarrow E(X^2) = 1 \quad (2)$$

Θα είναι :

$$\mu_Y = E(X^2 + Z) = E(X^2) + E(Z) \stackrel{(2)}{\underset{Z \sim N(0,1)}{=}} 1 + 0 = 1 \quad (3)$$

$$(iii) \quad \underline{E(XY)} \stackrel{(*)}{=} E(X \cdot (X^2 + Z)) = E(X^3 + XZ) = E(X^3) + E(XZ) \\ = \underline{E(XZ)} \quad (4) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Γιατί σε μια } N(0,1) \\ \text{οι ροπές περιττής} \\ \text{τάξης είναι μηδενικές} \end{array} \right)$$

Επειδή X, Z ανεξάρτητες, θα είναι :

$$E(XZ) = \mu_X \cdot \mu_Z = 0 \quad (5) \quad \text{γιατί } X, Z \sim N(0,1)$$

$$\text{Συνεπώς, } (4) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} E(XY) = 0 \quad (6) \checkmark$$

$$(iv) \quad \underline{Cov(X, Y)} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \leftarrow \text{SOS τύπος} \\ = E[(X - 0)(Y - 1)] = E(X \cdot (Y - 1)) = \\ = E(XY - X) = E(XY) - E(X) \stackrel{(6)}{\underset{X \sim N(0,1)}{=}} 0 - 0 = 0 \quad (7)$$

$$\text{Όμως } \text{Corr}(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\text{Var} X \cdot \text{Var} Y}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \stackrel{(7)}{=} \frac{0}{1 \cdot 1} = 0 \quad \checkmark$$