

(1) α.
 → Για την Τ.μ. X ν.δ.ο. $\text{Var } X = E X^2 - (E X)^2$

Εξ ορισμού είναι : $\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2$ (*)
όπου
 $\mu = E(X)$
↗
δαδική

Επομένως, θα έχουμε: $\text{Var } X = E(X - \mu)^2$ ανάπτυξη
της ταυτότητας

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \rightarrow \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 =$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= E X^2 - (E X)^2 \quad \checkmark$$

(1) b . $\rightarrow$ N.S.O.

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var} X$$

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος, έχουμε :

$$\text{Var}(aX + b) = E \left[\underbrace{aX + b}_Y - \underbrace{E(aX + b)}_{E(\cancel{X})} \right]^2 \leftarrow E(Y - \mu)^2$$

$$= E \left[(aX + b) - aE(X) - E(b) \right]^2$$

$$= E \left(\cancel{aX + b} - a \cdot E(X) - \cancel{b} \right)^2$$

$$= E \left[a(X - E(X)) \right]^2$$

$$= a^2 \cdot E \left[X - E(X) \right]^2$$

$$= a^2 \cdot \underbrace{E(X - \mu)^2}_{\text{Var} X}$$

, λόγω της (*)

$$= a^2 \cdot \text{Var} X \quad \checkmark$$

(2) Έστω X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες και ισοδύναμες τ.μ. με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 και ως είναι οι εξής γραμμικοί συνδυασμοί αυτών:

$$Z_1 = X_1 + X_2 \text{ (i)}, \quad Z_2 = X_2 - X_3 \text{ (ii)}$$

$\rightarrow$ N.S.O. $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \sigma^2$

Αυτό που ισχύει γενικά είναι:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= E[(Z_1 - E(Z_1)) \cdot (Z_2 - E(Z_2))] = \dots = \\ &= E(Z_1 \cdot Z_2) - E(Z_1) \cdot E(Z_2) \quad (*) \end{aligned}$$

Έχουμε ότι:

$$E(Z_1) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \stackrel{\text{εξ. υποθ.}}{=} \mu + \mu = 2\mu \quad (1)$$

$$E(Z_2) = E(X_2 - X_3) = E(X_2) - E(X_3) \stackrel{\text{εξ. υποθ.}}{=} \mu - \mu = 0 \quad (2)$$

Άρα, η (*) θα δώσει:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Cov}(Z_1, Z_2)} &= E(Z_1 \cdot Z_2) - E(Z_1) \cdot E(Z_2) \stackrel{(1)}{=} E(Z_1 \cdot Z_2) - \mu \cdot 0 \\ &\stackrel{(2)}{=} E(Z_1 \cdot Z_2) \end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε το $E(Z_1 \cdot Z_2)$.

Θα είναι: $E(Z_1 \cdot Z_2) = E[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 - X_3)] =$

$$= E(X_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot X_3 + X_2^2 - X_2 \cdot X_3) =$$

$$= E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1 \cdot X_3) + E(X_2^2) - E(X_2 \cdot X_3) =$$

$$= E(X_1) \cdot E(X_2) - E(X_1) \cdot E(X_3) + E(X_2^2) - E(X_2) \cdot E(X_3) =$$

$$= \cancel{\mu \cdot \mu} - \cancel{\mu \cdot \mu} + E(X_2^2) - \mu \cdot \mu$$

$$= E(X_2^2) - \mu^2 \quad (3)$$

Όπως για την τ.μ. X_2 , θα είναι:

$$\text{Var } X_2 = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2$$

$$= E(X_2^2) - \mu^2$$

$$\Rightarrow E(X_2^2) = \text{Var } X_2 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad (4)$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} E(Z_1 \cdot Z_2) = \sigma^2 + \cancel{\mu^2} - \cancel{\mu^2} = \sigma^2 \quad (5)$$

$\rightarrow$ Άρα και $\text{Cov}(Z_1, Z_2) \stackrel{(5)}{=} \sigma^2 \quad \checkmark$

Εύρεση Μέσης Τιμής και Διακύμανσης ⁽⁵⁾

μιας συνεχούς τ.μ. X , όταν δίνεται η συν. π.π. της.

→ Έστω X τ.μ. με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

ο Για την Μέση Τιμή μ :

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{(x+1)}{2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (x^2 + x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{1}{3} \right) \checkmark \quad (1) \end{aligned}$$

ο Για την Διακύμανση :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad (2)$$

Ομως $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \left(\frac{x+1}{2} \right) dx =$



$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{12} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{12} = \left(\frac{1}{3} \right) \checkmark \quad (3)$$

Apa,

$$(2) \xrightarrow[\textcircled{3}]{\textcircled{1}} \text{Var}(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \left(\frac{2}{9} \right) \checkmark$$

→ Αν η κατανομή της τ.μ. T δίνεται από :

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad 5 \leq t \leq 15 \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(i) Να βρεθεί η μέση τιμή $E(T)$ της τ.μ. T

(ii) Να βρείτε και τη διακύμανση σ^2 και την τυπική απόκλιση σ .

Λύση

$$\begin{aligned} (i) \quad E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_T(t) dt = \int_5^{15} t \cdot \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \left[\frac{t^2}{2} \right]_5^{15} = \\ &= \frac{1}{10} \left[\frac{15^2}{2} - \frac{5^2}{2} \right] = \frac{1}{10} \left(\frac{225 - 25}{2} \right) \\ &= \frac{1}{10} \cdot 100 = \underline{10} \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ii) Ως γνωστόν, είναι : $\sigma^2 = E(T^2) - [E(T)]^2$ ②

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f_T(t) dt = \int_5^{15} t^2 \cdot \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \left[\frac{t^3}{3} \right]_5^{15} = \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{15^3}{3} - \frac{5^3}{3} \right) = \frac{325}{3} \approx 108.333 \quad \text{③} \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε, } \sigma^2 \stackrel{\text{③}}{\stackrel{\text{①}}{=}} 108.333 - 10^2 \approx \underline{\underline{8.333}} \quad \text{④} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{Τυπική απόκλιση : } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8.333} \approx \underline{\underline{2.887}} \quad \checkmark$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

(8)

Στην Ομοιόμορφη Κατανομή της Διακριτής περίπτωσης

Γενικά εμφανίζεται και
↑ στη συνεχή περίπτωση

Θ Ευφράζει το Ισοπίθανο των αποτελεσμάτων ενός πειράματος.

Για κάθε $X \in \{1, 2, \dots, N\}$ ↙ πεπερ. δειγμ. χώρος

(a) $\rightarrow$ Ν.δ.ο. η $f_X(x) = P(X=x) = \frac{1}{N}$ είναι δ.π.

(b) $\rightarrow$ Ν.δ.ο. (i) $E(X) = \frac{N+1}{2}$ και (ii) $Var(X) = \frac{(N+1) \cdot (N-1)}{12}$

Απόδειξη:

(a) Για να είναι ^{γενικά} μια συνάρτηση, συν. πιθανότητας (δ.π.) πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

1. $p_X(x) \geq 0, \forall x$

2. $\sum_x p_X(x) = 1$

Ξεχνώντας από το 2:

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=1}^N \frac{1}{N} = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{N\text{-φορές}} = \cancel{N} \cdot \frac{1}{\cancel{N}} = 1 \quad \checkmark$$

Σχετικά με το 1: Είναι $f_X(x) \geq 0, \forall x$ αφού $f_X(x) = \frac{1}{N} > 0$

$\Rightarrow$ η $f_X(x) = P(X=x) = \frac{1}{N}$ είναι πράγματι δ.π. $\checkmark$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad (i) \quad E(X) &= \sum_x x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^N x \cdot \frac{1}{N} = 1 \cdot \frac{1}{N} + 2 \cdot \frac{1}{N} + \dots + N \cdot \frac{1}{N} = \\
 &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \dots + \frac{N}{N} = \frac{1+2+\dots+N}{N} = \\
 &= \frac{N \cdot \frac{(1+N)}{2}}{N} = \frac{\cancel{N} \cdot (1+N)}{2 \cdot \cancel{N}} = \left(\frac{1+N}{2} \right) \checkmark
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \text{Var } X = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - \left(\frac{N+1}{2} \right)^2 = EX^2 - \frac{(N+1)^2}{4} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Oport} \quad EX^2 &= \sum_x x^2 \cdot f(x) = \sum_{x=1}^N x^2 \cdot \frac{1}{N} = 1 \cdot \frac{1}{N} + 2^2 \cdot \frac{1}{N} + \dots + N^2 \cdot \frac{1}{N} \\
 &= \frac{1}{N} (1 + 2^2 + \dots + N^2) = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}(N+1)(2N+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow EX^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} \quad (2)$$

Apa,

$$(1) \xrightarrow{(2)} \text{Var}(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{2(N+1)(2N+1) - 3(N+1)^2}{12} = \frac{(2N+2)(2N+1) - 3(N^2+2N+1)}{12} =$$

$$= \frac{4N^2 + 2N + 4N + 2 - 3N^2 - 6N - 3}{12} = \frac{N^2 - 1}{12} = \left(\frac{(N-1)(N+1)}{12} \right) \checkmark$$

Διωνυμική Κατανομή (Διακριτή) (Ε ή Α)

$$X \sim B(n, p)$$

↓
Δύο πιθανά αποτελ.

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}, \quad x=0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{με} \quad q=1-p$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$$

Ιδιότητες: $X \sim B(n, p) \Rightarrow E(X) = \mu = n \cdot p$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q, \quad q=1-p$$

και αν $X \sim B(n, p)$ και $Y \sim B(m, p)$

τότε $X+Y \sim B(n+m, p)$

Άσκηση

Αν είναι γνωστό ότι κατά μέσο όρο το 30% των αγροτικών σπιτιών μιας περιοχής διαθέτουν ηλεκτρικό ρεύμα μέσω φωτοβολταϊκών, ποιά η πιθανότητα σε μια δειγματοληψία 20 σπιτιών με επανάληψη;

- (i) Το πολύ 3 από αυτά να διαθέτουν ηλεκ. ρεύμα μέσω φωτ/κών
- (ii) Τουλάχιστον 8 από αυτά να διαθέτουν ηλεκ. ρεύμα μέσω φωτ/κών
- (iii) Περισσότερα από 3 και λιγότερα από 8 να διαθέτουν ηλεκτρ. ρεύμα μέσω φωτ/κών
- (iv) Στο σύνολο των 800 σπιτιών αυτής της περιοχής, πόσα αναμένεται να έχουν ηλεκτρ. ρεύμα μέσω φωτ/κών;

Lösung:

$$(i) P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^3 \binom{20}{x} \cdot (0,3)^x \cdot (0,7)^{20-x} =$$

$$= \frac{20!}{(20-0)! \cdot 0!} \cdot \underset{1}{0,3^0} \cdot 0,7^{20} + \frac{20!}{19! \cdot 1!} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^{19} +$$

$$+ \frac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^{18} + \frac{20!}{17! \cdot 3!} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^{17}$$

$$= 0,0008 + 0,0068 + 0,0278 + 0,0716 = 0,1070 \quad \checkmark$$

$$(ii) P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 7) =$$

$$= 1 - [P(X \leq 3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)]$$

$$= 1 - [0,1070 + 0,1304 + 0,1789 + 0,1916 + 0,1643] =$$

$$= 0,2278$$

$$(iii) P(3 < X < 8) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) =$$

$$= \dots$$

$$(iv) E X = n \cdot p = 800 \cdot 0,3 = 240 \quad \checkmark$$