Εισαγωγή στην Οικονομετρία

Άγγελος Αλεξόπουλος
angelos@aueb.gr
ΚΩΔ: *PROPTYXIAKA*1404

Διάλεξη 8

Εαρινό Εξάμηνο 2024

Εκτιμήση Παραμέτρων

- Έχουμε έναν υπόδειγμα $f(x|\theta)$, όπου η παράμετρος θ θεωρούμε ότι είναι μια άγνωστη σταθερά για εμάς. Ενδιαφερόμαστε να πάρουμε μια σημειακή εκτίμηση.

- Ένας (σημειακός) εκτιμητής είναι οποιαδήποτε στατιστική συνάρτηση $W(X_1, \ldots, X_n)$ του δείγματος: άρα ο εκτιμητής είναι και αυτός **τυχαία μεταβλητή** αφού η τιμή του εξαρτάται απο το συγκεκριμένο δείγμα που έχουμε 'στα χέρια μας'.
- Η αριθμητική τιμή του εκτιμητή είναι η εκτίμηση: $\hat{\theta} = W(X_1, \ldots, X_n)$

- Ο στόχος μας είναι να έχουμε μεθόδους που:
  (α) βρίσκουν εκτιμητές
  (β) αξιολογούν εκτιμητές

  Συνήθως απαιτείται μια επαναληπτική διαδικασία μεταξύ (α) και (β) για να πάρουμε μια 'καλή' εκτίμηση.

Κατανομή Εκτιμητή - Παράδειγμα

Αν $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι *i.i.d.* λήψεις από μια κανονική κατανομή με μέσο μ_Y και διακύμανση σ_Y^2 τότε $\bar{Y}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ_Y και διακύμανση $\frac{\sigma_Y^2}{n}$. Δηλαδή Αν

$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ τότε

$$\bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n})$$

.

Μέθοδοι Εύρεσης Εκτιμητών

Μερικές συχνά χρησιμοποιούμενοι μέθοδοι είναι:

(α). Μέθοδος των ροπών

(β). **Εκτιμητής μέγιστης Πιθανοφάνειας**

(ς). Εκτιμητής *Bayes*

(δ). **Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων**

Αξιολόγηση Εκτιμητών - Ιδιότητες

- **Αμεροληψία:** Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ θεωρείται ως αμερόληπτος όταν η αναμενόμενη τιμή του ισούται με την παράμετρο που προσπαθεί να εκτιμήσει:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta \text{ ή } \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta) = 0$$

- **Αποτελεσματικότητα (*Efficiency*):** Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ είναι αποτελεσματικός έναντι ενός εκτιμητή $\tilde{\theta}$ όταν η διακύμανση του πρώτου είναι μικρότερη (ή ίση) από τη διακύμανση του δεύτερου (μεγαλύτερη ακρίβεια εκτίμηση):

$$Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$$

Ποιντ Εστιματιον - Αξιολόγηση

- Συνήθως διαφορετικές μέθοδοι θα προτείνουν διαφορετικούς εκτιμητές. Επομένως, χρειαζόμαστε κάποιες αρχές που θα μας βοηθήσουν να αξιολογήσουμε διαφορετικούς εκτιμητές. Η θεωρία αποφάσεων ασχολείται με αυτού του είδους τα προβλήματα.

- **Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (MSE)**:
  Το MSE ενός εκτιμητή $\hat{\theta}$ μιας παραμέτρου θ, είναι η συνάρτηση του θ που ορίζεται από:

$$E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2$$

- Είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2 &= Var_\theta(\hat{\theta}) + \left[E_\theta(\hat{\theta}) - \theta\right]^2 \\ &= Var_\theta(\hat{\theta}) + \left[Bias_\theta(\hat{\theta})\right]^2 \end{aligned}$$

Εκτίμηση Σημείου -Αξιολόγηση

Παράδειγμα:

Έχουμε ένα τυχαίο δείγμα: $X_1, \ldots, X_n$ *iid* από την $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, όπου και τα δύο μ και σ^2 είναι άγνωστα και ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε το σ^2. Χρησιμοποιήστε το *MSE* για να συγκρίνετε την εκτίμηση s^2 με την εκτίμηση που βασίζεται στη μέγιστη πιθανοφάνεια $\left(\hat{\sigma}^2\right)$.

Εκτίμηση Σημείου -Αξιολόγηση

Παράδειγμα:
Έχουμε ένα τυχαίο δείγμα: $X_1, \ldots, X_n$ *iid* από την $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, όπου και τα δύο μ και σ^2 είναι άγνωστα και ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε το σ^2. Χρησιμοποιήστε το *MSE* για να συγκρίνετε την εκτίμηση s^2 με την εκτίμηση που βασίζεται στη μέγιστη πιθανοφάνεια $\left(\hat{\sigma}^2\right)$.

Έχουμε δύο διαθέσιμους εκτιμητές:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

για τους οποίους ισχύει:

$$E[s^2] = \sigma^2 \qquad E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$Var[s^2] = \tfrac{2}{n-1}\sigma^4 \qquad Var[\hat{\sigma}^2] = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

Εκτίμηση Σημείου -Αξιολόγηση

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
MSE\left[\hat{\sigma}^2\right] &= V[\hat{\sigma}^2] + \left(E[\hat{\sigma}^2] - \sigma^2\right)^2 \\
&= \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4 + \left(\frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2\right)^2 \\
&= \frac{2n-2}{n^2}\sigma^4 + \left(-\frac{1}{n}\sigma^2\right)^2 \\
&= \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4 \\
&< \frac{2n}{n^2}\sigma^4 = \frac{2}{n}\sigma^4 \\
&< \frac{2}{n-1}\sigma^4 = MSE[S^2]
\end{aligned}$$

Έλεγχος Υποθέσεων

Έλεγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Μια υπόθεση είναι μια δήλωση σχετικά με την παράμετρο της πληθυσμιακής κατανομής. Οι δύο (αμοιβαία αποκλειστικές) υποθέσεις σε ένα πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων ονομάζονται μηδενική (H_0) και η εναλλακτική (H_1 ή H_a).

Έλεγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Μια υπόθεση είναι μια δήλωση σχετικά με την παράμετρο της πληθυσμιακής κατανομής. Οι δύο (αμοιβαία αποκλειστικές) υποθέσεις σε ένα πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων ονομάζονται μηδενική (H_0) και η εναλλακτική (H_1 ή H_a).

- Η δήλωση που ελέγχεται σε ένα τεστ σημαντικότητας ονομάζεται μηδενική υπόθεση (H_0). Το τεστ σημαντικότητας σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον της H_0. Συνήθως η H_0 εκφράζει την 'κατάσταση ισορροπίας', ή μια δήλωση τύπου 'καμία επίδραση' ή 'καμία διαφορά'.

Έλεγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Μια υπόθεση είναι μια δήλωση σχετικά με την παράμετρο της πληθυσμιακής κατανομής. Οι δύο (αμοιβαία αποκλειστικές) υποθέσεις σε ένα πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων ονομάζονται μηδενική (H_0) και η εναλλακτική (H_1 ή H_a).
- Η δήλωση που ελέγχεται σε ένα τεστ σημαντικότητας ονομάζεται μηδενική υπόθεση (H_0). Το τεστ σημαντικότητας σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον της H_0. Συνήθως η H_0 εκφράζει την 'κατάσταση ισορροπίας', ή μια δήλωση τύπου 'καμία επίδραση' ή 'καμία διαφορά'.
- Η εναλλακτική υπόθεση H_1 είναι μια δήλωση σχετικά με την παράμετρο που ελπίζουμε ή υποψιαζόμαστε ότι είναι αληθής αντί της H_0.

Μαθηματική μορφή ελέγχων

Ο έλεγχος υποθέσεων θα είναι της μορφής:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0 : & \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : & \theta \in \Theta_1 \end{array} \right\}$$

με $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Συνήθως (αλλά όχι απαραίτητα) $\Theta_1 = \Theta_0^c$.

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Συνήθως στη μηδενική υπόθεση εξετάζουμε εάν η άγνωστη παράμετρος παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, ενώ η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να είναι είτε μονόπλευρη (μικρότερη/μεγαλύτερη από την τιμή στη μηδενική υπόθεση) είτε διπλής όψης (διαφορετική από την τιμή στη μηδενική υπόθεση):

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\}$$

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Συνήθως στη μηδενική υπόθεση εξετάζουμε εάν η άγνωστη παράμετρος παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, ενώ η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να είναι είτε μονόπλευρη (μικρότερη/μεγαλύτερη από την τιμή στη μηδενική υπόθεση) είτε διπλής όψης (διαφορετική από την τιμή στη μηδενική υπόθεση):

$$\left\{\begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array}\right\}$$

- Ένας τρόπος ελέγχου υποθέσεων ή δοκιμή υπόθεσης είναι μια κανόνας που καθορίζει για ποιες τιμές του δείγματος θα απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Συνήθως στη μηδενική υπόθεση εξετάζουμε εάν η άγνωστη παράμετρος παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, ενώ η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να είναι είτε μονόπλευρη (μικρότερη/μεγαλύτερη από την τιμή στη μηδενική υπόθεση) είτε διπλής όψης (διαφορετική από την τιμή στη μηδενική υπόθεση):

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\}$$

- Ένας τρόπος ελέγχου υποθέσεων ή δοκιμή υπόθεσης είναι μια κανόνας που καθορίζει για ποιες τιμές του δείγματος θα απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

- Το υποσύνολο του χώρου δειγμάτων για το οποίο θα απορρίψουμε την H_0 ονομάζεται **περιοχή απόρριψης**.

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Συνήθως στη μηδενική υπόθεση εξετάζουμε εάν η άγνωστη παράμετρος παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, ενώ η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να είναι είτε μονόπλευρη (μικρότερη/μεγαλύτερη από την τιμή στη μηδενική υπόθεση) είτε διπλής όψης (διαφορετική από την τιμή στη μηδενική υπόθεση):

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\}$$

- Ένας τρόπος ελέγχου υποθέσεων ή δοκιμή υπόθεσης είναι μια κανόνας που καθορίζει για ποιες τιμές του δείγματος θα απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

- Το υποσύνολο του χώρου δειγμάτων για το οποίο θα απορρίψουμε την H_0 ονομάζεται **περιοχή απόρριψης**.

- Συνήθως ένα τεστ υποθέσεων διενεργείται μέσω ενός στατιστικού τεστ $W(X_1, \ldots, X_n)$.

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Το στατιστικό τεστ $W(X_1, \ldots, X_n)$ υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι έγκυρη, ακολουθεί μια υποθετική κατανομή. Με βάση αυτήν την κατανομή, μπορούμε να παράγουμε την περιοχή απόρριψης του τεστ. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ίδια υποθετική κατανομή, μπορούμε να εκτελέσουμε το τεστ υποθέσεων μέσω της $p - value$ του τεστ.

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Το στατιστικό τεστ $W(X_1, \ldots, X_n)$ υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι έγκυρη, ακολουθεί μια υποθετική κατανομή. Με βάση αυτήν την κατανομή, μπορούμε να παράγουμε την περιοχή απόρριψης του τεστ. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ίδια υποθετική κατανομή, μπορούμε να εκτελέσουμε το τεστ υποθέσεων μέσω της $p - value$ του τεστ.
- $P - value$: Η πιθανότητα, υπολογισμένη υποθέτοντας ότι η H_0 είναι αληθής, ότι ένα στατιστικό τεστ θα πάρει μια τιμή τόσο εξτρεμε ή ακόμα πιο εξτρεμε από αυτήν που παρατηρείται πραγματικά, ονομάζεται η π-τιμή του τεστ. Όσο μικρότερη είναι η π-τιμή, τόσο πιο ισχυρές είναι οι αποδείξεις κατά της H_0 με βάση τα δεδομένα.

Έλεγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Το στατιστικό τεστ $W(X_1, \ldots, X_n)$ υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι έγκυρη, ακολουθεί μια υποθετική κατανομή. Με βάση αυτήν την κατανομή, μπορούμε να παράγουμε την περιοχή απόρριψης του τεστ. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ίδια υποθετική κατανομή, μπορούμε να εκτελέσουμε το τεστ υποθέσεων μέσω της $p - value$ του τεστ.

- $P - value$: Η πιθανότητα, υπολογισμένη υποθέτοντας ότι η H_0 είναι αληθής, ότι ένα στατιστικό τεστ θα πάρει μια τιμή τόσο εξτρεμε ή ακόμα πιο εξτρεμε από αυτήν που παρατηρείται πραγματικά, ονομάζεται η π-τιμή του τεστ. Όσο μικρότερη είναι η π-τιμή, τόσο πιο ισχυρές είναι οι αποδείξεις κατά της H_0 με βάση τα δεδομένα.

- **Στατιστική Σημαντικότητα**: Εάν η π-τιμή είναι τόσο μικρή ή μικρότερη από ένα συγκεκριμένο α, λέμε ότι τα δεδομένα είναι στατιστικά σημαντικά στο επίπεδο α που ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας.

Ελέγχος Υποθέσεων: Εισαγωγή

- Το στατιστικό τεστ $W(X_1, \ldots, X_n)$ υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι έγκυρη, ακολουθεί μια υποθετική κατανομή. Με βάση αυτήν την κατανομή, μπορούμε να παράγουμε την περιοχή απόρριψης του τεστ. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ίδια υποθετική κατανομή, μπορούμε να εκτελέσουμε το τεστ υποθέσεων μέσω της $p - value$ του τεστ.

- $P - value$: Η πιθανότητα, υπολογισμένη υποθέτοντας ότι η H_0 είναι αληθής, ότι ένα στατιστικό τεστ θα πάρει μια τιμή τόσο εξτρεμε ή ακόμα πιο εξτρεμε από αυτήν που παρατηρείται πραγματικά, ονομάζεται η π-τιμή του τεστ. Όσο μικρότερη είναι η π-τιμή, τόσο πιο ισχυρές είναι οι αποδείξεις κατά της H_0 με βάση τα δεδομένα.

- **Στατιστική Σημαντικότητα**: Εάν η π-τιμή είναι τόσο μικρή ή μικρότερη από ένα συγκεκριμένο α, λέμε ότι τα δεδομένα είναι στατιστικά σημαντικά στο επίπεδο α που ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας.

Ελεγχος Υποθέσεων

Τεστ Σημαντικότητας:

(1) Έστω H_0 και H_1. Το τεστ σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον του H_0.

Ελεγχος Υποθέσεων

Τεστ Σημαντικότητας:

(1) Έστω H_0 και H_1. Το τεστ σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον του H_0.

(2) Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας α. Αυτό δηλώνει πόσα στοιχεία κατά H_0 θεωρούμε σημαντικά.

Ελεγχος Υποθέσεων

Τεστ Σημαντικότητας:

(1) Έστω H_0 και H_1. Το τεστ σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον του H_0.

(2) Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας α. Αυτό δηλώνει πόσα στοιχεία κατά H_0 θεωρούμε σημαντικά.

(3) Υπολογισμός της τιμής του τεστ στατιστις πάνω στο οποίο θα βασίζεται το τεστ. Αυτό είναι ένα τεστ στατιστις που μετρά πόσο καλά συμμορφώνονται τα δεδομένα με το H_0.

Ελεγχος Υποθέσεων

Τεστ Σημαντικότητας:

(1) Έστω H_0 και H_1. Το τεστ σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον του H_0.

(2) Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας α. Αυτό δηλώνει πόσα στοιχεία κατά H_0 θεωρούμε σημαντικά.

(3) Υπολογισμός της τιμής του τεστ στατιστις πάνω στο οποίο θα βασίζεται το τεστ. Αυτό είναι ένα τεστ στατιστις που μετρά πόσο καλά συμμορφώνονται τα δεδομένα με το H_0.

(4) Υπολογισμός της τιμής π-αλυε των παρατηρούμενων δεδομένων.

Ελεγχος Υποθέσεων

Τεστ Σημαντικότητας:

(1) Έστω H_0 και H_1. Το τεστ σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον του H_0.

(2) Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας α. Αυτό δηλώνει πόσα στοιχεία κατά H_0 θεωρούμε σημαντικά.

(3) Υπολογισμός της τιμής του τεστ στατιστις πάνω στο οποίο θα βασίζεται το τεστ. Αυτό είναι ένα τεστ στατιστις που μετρά πόσο καλά συμμορφώνονται τα δεδομένα με το H_0.

(4) Υπολογισμός της τιμής π-αλυε των παρατηρούμενων δεδομένων.
   - Αν π-αλυε $\leq \alpha$: το αποτέλεσμα του τεστ είναι στατιστικά σημαντικό στο επίπεδο α, δηλαδή απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση στο επίπεδο α.

Ελεγχος Υποθέσεων

Τεστ Σημαντικότητας:

(1) Έστω H_0 και H_1. Το τεστ σχεδιάζεται για να αξιολογήσει τη δύναμη των ενδείξεων εναντίον του H_0.

(2) Καθορισμός του επιπέδου σημαντικότητας α. Αυτό δηλώνει πόσα στοιχεία κατά H_0 θεωρούμε σημαντικά.

(3) Υπολογισμός της τιμής του τεστ στατιστις πάνω στο οποίο θα βασίζεται το τεστ. Αυτό είναι ένα τεστ στατιστις που μετρά πόσο καλά συμμορφώνονται τα δεδομένα με το H_0.

(4) Υπολογισμός της τιμής π-αλυε των παρατηρούμενων δεδομένων.
- Αν π-αλυε $\leq \alpha$: το αποτέλεσμα του τεστ είναι στατιστικά σημαντικό στο επίπεδο α, δηλαδή απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση στο επίπεδο α.
- Αν $p - value > \alpha$: το αποτέλεσμα του τεστ δεν είναι στατιστικά σημαντικό στο επίπεδο α, δηλαδή δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση στο επίπεδο α.

Παράδειγμα: Κανονικός μέσος με γνωστή διακύμανση

HT για τον μέσο κανονικών δεδομένων με γνωστή διακύμανση:

- Έχουμε $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N\left(\theta, \sigma^2\right)$ με θ άγνωστο και σ^2 γνωστό. Μας ενδιαφέρει να εκτελέσουμε έναν από τους παρακάτω ελέγχους υποθέσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα: Κανονικός μέσος με γνωστή διακύμανση

HT για τον μέσο κανονικών δεδομένων με γνωστή διακύμανση:

- Έχουμε $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N\left(\theta, \sigma^2\right)$ με θ άγνωστο και σ^2 γνωστό. Μας ενδιαφέρει να εκτελέσουμε έναν από τους παρακάτω ελέγχους υποθέσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\}$$

- Θεωρούμε τον εκτιμήτη: $\hat{\theta} = \overline{X}$ για τον οποίον είδαμε ότι:

$$\overline{X} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Παράδειγμα: Κανονικός μέσος με γνωστή διακύμανση

HT για τον μέσο κανονικών δεδομένων με γνωστή διακύμανση:

- Έχουμε $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N\left(\theta, \sigma^2\right)$ με θ άγνωστο και σ^2 γνωστό. Μας ενδιαφέρει να εκτελέσουμε έναν από τους παρακάτω ελέγχους υποθέσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right\}$$

- Θεωρούμε τον εκτιμήτη: $\hat{\theta} = \overline{X}$ για τον οποίον είδαμε ότι:

$$\overline{X} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Τυποποιώντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$$\frac{\overline{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\overline{X} - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

HT: Νορμαλ μέσος με γνωστή διακύμανση

- Θεωρώντας οτι η H_0 είναι έγκυρη $(\theta = \theta_0)$ τότε παίρνουμε το παρακάτω στατιστικό ελέγχου:

$$Z = \frac{\overline{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

το οποίο θεωρούμε οτι προέρχεται από την κατανομή $N(0, 1)$.

HT: Νορμαλ μέσος με γνωστή διακύμανση

- Θεωρώντας οτι η H_0 είναι έγκυρη $(\theta = \theta_0)$ τότε παίρνουμε το παρακάτω στατιστικό ελέγχου:

$$Z = \frac{\overline{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

  το οποίο θεωρούμε οτι προέρχεται από την κατανομή $N(0,1)$.

- Για προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α η περιοχή απόρριψης (RR) του ελέγχου θα καθοριστεί από το H_1:
  - Αν $H_1 : \theta < \theta_0$ τότε $RR = \{x : Z < z_\alpha\}$
  - Αν $H_1 : \theta > \theta_0$ τότε $RR = \{x : Z > z_{1-\alpha}\}$
  - Αν $H_1 : \theta \neq \theta_0$ τότε $RR = \{x : |Z| > z_{1-\alpha/2}\}$

HT: Νορμαλ μέσος με γνωστή διακύμανση

- Θεωρώντας οτι η H_0 είναι έγκυρη ($\theta = \theta_0$) τότε παίρνουμε το παρακάτω στατιστικό ελέγχου:

$$Z = \frac{\overline{X} - \theta_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

  το οποίο θεωρούμε οτι προέρχεται από την κατανομή $N(0, 1)$.

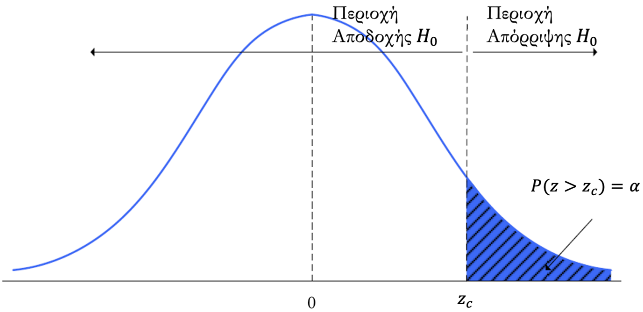
- Για προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α η περιοχή απόρριψης (RR) του ελέγχου θα καθοριστεί από το H_1:
  - Αν $H_1 : \theta < \theta_0$ τότε $RR = \{x : Z < z_\alpha\}$
  - Αν $H_1 : \theta > \theta_0$ τότε $RR = \{x : Z > z_{1-\alpha}\}$
  - Αν $H_1 : \theta \neq \theta_0$ τότε $RR = \{x : |Z| > z_{1-\alpha/2}\}$

- Εναλλακτικά, αν το στατιστικό ελέγχου είναι z, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το $p - value$:
  - Αν $H_1 : \theta < \theta_0$ τότε π-αλυε$=P(Z \leq z)$
  - Αν $H_1 : \theta > \theta_0$ τότε π-αλυε$=P(Z \geq z)$
  - Αν $H_1 : \theta \neq \theta_0$ τότε π-αλυε$=P(Z \geq |z|)$

Στατιστικός Έλεγχος -Γραφικά

Μονόπλευρος έλεγχος προς τα δεξιά

$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta > \theta_0$

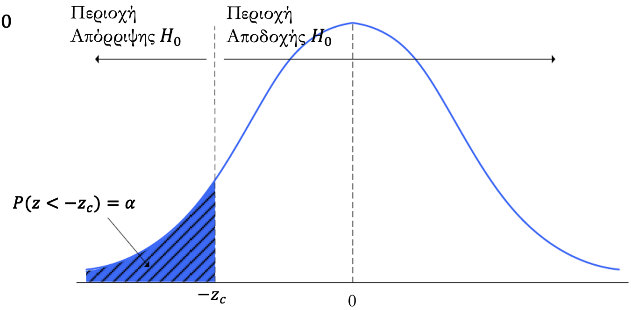


$$p - \text{τιμή} = P(z \geq \zeta) = 1 - P(z < \zeta) = 1 - \Phi(\zeta)$$

Στατιστικός Έλεγχος -Γραφικά

Μονόπλευρος έλεγχος προς τα αριστερά

$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta < \theta_0$

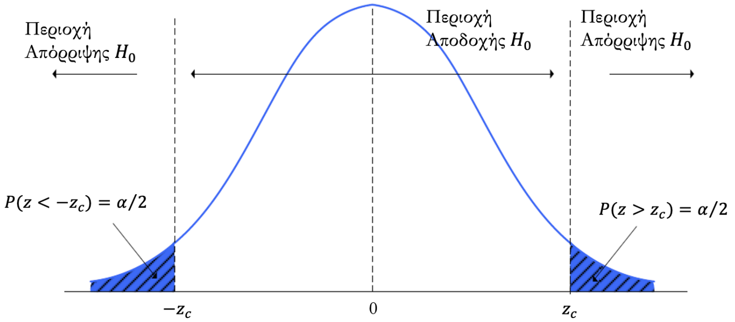


$$p - \text{τιμή} = P(z \leq \zeta) = \Phi(\zeta)$$

Στατιστικός Έλεγχος -Γραφικά

Δίπλευρος έλεγχος

$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta \neq \theta_0$



$$p - \text{value} = P(z \leq -\zeta) + P(z \geq \zeta) = 2P(z \leq -\zeta)$$

Σφάλματα κατά τον έλεγχο υποθέσεων

	Αληθής H_0	**Ψευδής H_0**
Απόρριψη H_0	Σφάλμα τύπου I	Σωστή απόφαση
Αποδοχή H_0	Σωστή απόφαση	Σφάλμα τύπου II

- $\alpha = P(\text{Σφάλμα τύπου I}) = \mathrm{P}(\text{Απόρριψη } H_0 \mid \text{Αληθής } H_0)$
  - ✓ α επίπεδο σημαντικότητας & μέγεθος κριτηρίου (significance level & size of the test)
- $\beta = P(\text{Σφάλμα τύπου II}) = \mathrm{P}(\text{Αποδοχή } H_0 \mid \text{Αληθής } H_1)$
  $= \mathrm{P}(\text{Αποδοχή } H_0 \mid \text{Ψευδής } H_0)$
- Ισχύς κριτηρίου (power of the test):

$$\mathrm{P}(\text{Απόρριψη } H_0 \mid \text{Αληθής } H_1) = 1 - \mathrm{P}(\text{Αποδοχή } H_0 \mid \text{Αληθής } H_1)$$
$$= 1 - P(\text{Σφάλμα τύπου II}) = 1 - \beta$$

Εκτίμηση Διαστήματος & Ελεγχος Υποθέσεων

Για την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό:

Εκτίμηση Διαστήματος & Ελεγχος Υποθέσεων

Για την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό:

- Η περιοχής μη απόρριψης ενός ελέγχου υποθέσεων είναι το σύνολο στον **δειγματικό χώρο** για το οποίο δεν απορρίπτεται το $H_0 : \mu = \mu_0$, δηλαδή:

$$A(\mu_0) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{x} \leq \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

  Συνεπώς, σταθεροποιούμε την παράμετρο και βρήσκουμε ποιες τιμές δείγματος είναι συμβατές με αυτήν τη σταθερή τιμή (ώστε το H_0 να μην απορρίπτεται).

Εκτίμηση Διαστήματος & Ελεγχος Υποθέσεων

- Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι το σύνολο στον **δειγματικό χώρο** με πιθανές τιμές του μ, δηλαδή:

$$C\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left\{\mu : \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

- Το σύνολο του διαστήματος εμπιστοσύνης σταθεροποιεί την τιμή του δείγματος και βρήσκει ποιες παραμέτρους (το διάστημα εμπιστοσύνης) κάνουν αυτήν την τιμή δείγματος πιο εύλογη (**όχι πιθανή** καθώς η παράμετρος, ως άγνωστη σταθερά, θα είναι είτε εντός είτε εκτός οποιουδήποτε δοθέντος διαστήματος).Έχουμε ότι:

$$\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in A(\mu_0) \Leftrightarrow \mu_0 \in C\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

Διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο του πληθυσμού

$$P(-z_{a/2} \leq z \leq z_{a/2}) = 1 - a$$
$$P(z < -z_{a/2}) = a/2$$
$$P(z > z_{a/2}) = a/2$$