

(Παραπέμπουμε στο Ch.10 του S.M. Ross
"Introduction to Probability Models, 6th Ed, 1997)

Θεωρούμε τον συρρετρικό τυχαίο περίπατο για τον οποίο σε κάθε χρονική μονάδα μπορούμε να μεταβούμε ένα μοναδιαίο βήμα δεξιά ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, έχουμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Υποθέτουμε ότι επιταχύνουμε αυτή την διαδικασία θεωρώντας μικρότερα και μικρότερα βήματα σε μικρότερα και μικρότερα χρονικά διαστήματα. Το όριο αυτής της διαδικασίας είναι η κίνηση Brown.

Υποθέτουμε ότι σε κάθε Δt χρονιές μονάδες κάνουμε ένα βήμα μεγέθους Δx προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά με ίσες πιθανότητες. Έστω $X(t)$ η θέση μας την χρονική στιγμή t , τότε:

$$X(t) = \Delta x (X_1 + \dots + X_{\lfloor t/\Delta t \rfloor}) \quad \text{d'après} \quad (1)$$

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{αν το } i\text{-οστό βήμα μήκους } \Delta x \text{ είναι προς τα δεξιά} \\ -1 & \text{" " " " " " " " " κριότερα} \end{cases}$$

και $[t/\Delta t]$ είναι ο μέγιστος ακέραιος μικρότερος ή ίσος με $t/\Delta t$, και οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_{[t/\Delta t]}$ είναι ανεξάρτητες με

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Από $E(X_i) = 0$, $Var(X_i) = E(X_i^2) = 1$, από την (4) έχουμε

$$E[X(t)] = 0$$

$$\text{Var}(X(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t} \right]$$

(2)

Τώρα θα θεωρήσουμε ότι το Δx και το Δt τείνουν στο μηδέν. Όμως, θα το κάνουμε αυτό με έναν τέτοιο τρόπο ώστε η προκύπτουσα

οριακή διαδικασία είναι μη τετριμμένη (για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι $\Delta x = \Delta t$ και υποθέσουμε ότι $\Delta t \rightarrow 0$, τότε από τη σχέση (2) βλέπουμε ότι $E[X(t)]$ και $\text{Var}(X(t))$ συγκλίνουν προς το μηδέν και η τ.φ. $X(t)$ θα συνέκλινε προς το μηδέν με πιθανότητα 1). Αν υποθέσουμε ότι $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ για κάποιο θετικό αριθμό σ , τότε από την (2) βλέπουμε ότι, καθώς $\Delta t \rightarrow 0$,

$$E[X(t)] = 0$$

$$\text{Var}(X(t)) \rightarrow \sigma^2 t$$

Αναφέρουμε τώρα μερικές διασυνθηκικές ιδιότητες της οριακής διαδικασίας που προκύπτει παίρνοντας $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ και $\Delta t \rightarrow 0$. Από την (1)

και το κεντρικό οριακό θεώρημα τα παρακάτω φαίνονται λογικά.

(i) Η τ.φ. $X(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\sigma^2 t$.

Επιπροσδίδως, αφού οι μεταβολές της τιμής των τυχαίων περιπάτου σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες, έχουμε ότι

(ii) Η διαδικασία $X(t), t \geq 0$, έχει ανεξάρτητες προσauζήσεις, δηλαδή για $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ έχουμε ότι:

$$X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1)$$

είναι ανεξάρτητες τ.φ. Τέλος, αφού η μεταβολή της θέσης των τυχαίων περιπάτου σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος των διαστημάτων, προκύπτει ότι:

(iii) Η διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει σταθίμες προσauζήσεις, δηλαδή η κατανομή της τ.φ. $X(t+s) - X(t)$ δεν εξαρτάται από το t .

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε τον επίσημο ορισμό της κίνησης Brown.

Ορισμός: Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται Διαδικασία Κίνησης Brown ή Κίνηση Brown αν

(i) $X(0) = 0$

(ii) Η $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει σταθίμες και ανεξάρτητες προσauζήσεις

(iii) Για κάθε $t > 0$, η $X(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\sigma^2 t$

Η Διαδικασία της κίνησης Brown, που μερικές φορές ονομάζεται διαδικασία Wiener, είναι από τις πιο χρήσιμες στοχαστικές διαδικασίες στην εφαρμοσμένη πιθανοθεωρία. Προέρχεται από την φυσική για την περιγραφή της κίνησης Brown. Αυτό το φαινόμενο (που πήρε το όνομά του από τον Άγγλο βοτανολόγο Robert Brown, ο οποίος το ανακάλυψε) είναι η κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο εμβαπτίζεται ελκυστήρα σ' ένα υγρό ή αέριο. Από τότε, αυτή η διαδικασία έχει χρησιμοποιηθεί επωφελώς στο στατιστικό έλεγχο προσαρρησιμότητας, στην ανάλυση των τιμών των μετοχών στο χρηματιστήριο και στην κβαντομηχανική.

Η πρώτη εξήγηση του φαινομένου της κίνησης Brown είχε δοθεί από τον Einstein το 1905. Έδειξε ότι η κίνηση Brown θα μπορούσε να εξηγηθεί αν υποθέσουμε ότι το εμβαπτιζόμενο σωματίδιο υπόκειται σε συνεχή βομβαρδισμό από τα μόρια που το περιβάλλουν. Όμως ο επίσημος ορισμός της κίνησης Brown δόθηκε από τον Wiener σε μία σειρά από άρθρα που δημοσιεύτηκαν από το 1918.

Αν $\sigma = 1$ τότε η διαδικασία ονομάζεται κανονική κίνηση Brown (Standard Brownian motion). Αφού οποιαδήποτε κίνηση Brown μπορεί να μετατραπεί σε κανονική θέτοντας

$$B(t) = \frac{X(t)}{\sigma}$$

θα υποθέσουμε σε αυτό το κεφάλαιο ότι $\sigma = 1$

Η ερμηνεία της κίνησης Brown ως όριο τυχαίων περιπάτων (εξίσωση (1)) υποδεικνύει ότι η διαδικασία $X(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς t . Αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει, δηλαδή με πιθανότητα 1, η $X(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς t . Αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετά βαθύ και δεν θα παρουσιάσουμε την απόδειξή του.

Αφού η τ.μ. $X(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση t , η συνάρτηση πυκνότητάς της δίνεται από τον τύπο:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

Για να βρούμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ για $t_1 < \dots < t_n$

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι το σύνολο των ισότητων

$$X(t_1) = x_1,$$

$$X(t_2) = x_2,$$

$$\vdots$$

$$X(t_n) = x_n$$

ισοδυναμεί με τις ισότητες

$$X(t_1) = x_1,$$

$$X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1,$$

$$\vdots$$

$$X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

Όμως, λόγω των ανεξαρτήτων προσαυξήσεων, έπεται ότι οι τ.μ.

$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες κ.μ., λόγω της υπόθεσης των ορθογώνων προσαυξήσεων, έπεται ότι η τ.μ. $X(t_k) - X(t_{k-1})$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση $t_k - t_{k-1}$. Συνεπώς, η από κοινού πυκνότητα των $X(t_1), \dots, X(t_n)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2-x_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1}) \\ &= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \dots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}} \right] \right\}}{(2\pi)^{n/2} [t_1(t_2-t_1) \dots (t_n-t_{n-1})]^{1/2}} \end{aligned}$$

Θεωρητικά, από την παραπάνω σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε πιθανότητα που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να βρούμε τη δεσμευμένη κατανομή της $X(s)$ δοθέντος ότι $X(t) = B$, όπου $s < t$. Η δεσμευμένη πυκνότητα δίδεται από:

$$\begin{aligned} f_{s|t}(x|B) &= \frac{f_s(x) f_{t-s}(B-x)}{f_t(B)} \\ &= K_1 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2s} - \frac{(B-x)^2}{2(t-s)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K_2 \exp \left\{ -x^2 \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(t-s)} \right) + \frac{Bx}{t-s} \right\} \\
&= K_2 \exp \left\{ -\frac{t}{2s(t-s)} \left(x^2 - 2 \frac{sB}{t} x \right) \right\} \\
&= K_3 \exp \left\{ -\frac{\left(x - \frac{Bs}{t} \right)^2}{2s(t-s)/t} \right\},
\end{aligned}$$

όπου K_1, K_2, K_3 δεν εξαρτώνται από το x . Έτσι, βλέπουμε από την παραπάνω σχέση ότι η δεσφειμένη κατανομή της $X(s)$ δοθέντος ότι $X(t) = B$, για $s < t$, είναι κανονική με μέση τιμή και διακύμανση που δίνονται παρακάτω:

$$E[X(s) | X(t) = B] = \frac{s}{t} B, \quad (4)$$

$$\text{Var}[X(s) | X(t) = B] = \frac{s}{t} (t-s)$$

Παράδειγμα: Σ έναν ποδηλατικό αγώνα ανάμεσα σε δύο ποδηλάτες, έστω $Y(t)$ ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα) που ο ποδηλάτης, ο οποίος ξεκίνησε στην εσωτερική θέση, είναι μπροστά όταν το 100% του αγώνα έχει συμπληρωθεί, και υποθέτουμε ότι η διαδικασία $\{Y(t), 0 \leq t \leq 1\}$ μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία διαδικασία κίνησης Brown με παράμετρο διακύμανσης.

(a) Αν ο εσωτερικός ποδηλάτης προηγείται κατά σ δευτερόλεπτα στη μέση του αγώνα, ποιά είναι η πιθανότητα ότι θα είναι ο νικητής;

(b) Αν ο εσωτερικός ποδηλάτης κερδίζει τον αγώνα με μία διαφορά 10% με σ δευτερόλεπτα, ποιά είναι η πιθανότητα να ήταν μπροστά στη μέση του αγώνα;

$$\begin{aligned}
\text{Πλνμ: (a)} \quad &P\{Y(1) > 0 | Y(1/2) = \sigma\} \\
&= P\{Y(1) - Y(1/2) > -\sigma | Y(1/2) = \sigma\} \\
&= P\{Y(1) - Y(1/2) > -\sigma\} \quad (\text{λόγω ανεξαρτητήτων προσυζήσεων}) \\
&= P\{Y(1/2) > -\sigma\} \quad (\text{λόγω σταθερών προσυζήσεων}) \\
&= P\left\{ \frac{Y(1/2)}{\sigma/\sqrt{2}} > -\sqrt{2} \right\} \\
&= \Phi(\sqrt{2}) \\
&\approx 0.9213
\end{aligned}$$

where $\Phi(x) = P\{N(0,1) \leq x\}$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής.

(6) Αφού θέλουμε να υπολογίσουμε την $P\{Y(1/2) > 0 \mid Y(1) = \sigma\}$, ας προσδιορίσουμε κατ' αρχάς τη δεσφευμένη κατανομή της $Y(s)$ δοθέντος ότι $Y(t) = C_1$, αν $s < t$. Αφού $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι κανονική κίνηση Brown όταν $X(t) = Y(t)/\sigma$, από τις εξισώσεις (4) διαπιστώνουμε ότι η δεσφευμένη κατανομή της $X(s)$, δοθέντος ότι $X(t) = C_1/\sigma$, είναι κανονική με μέση τιμή $sC_1/t\sigma$ και διακύμανση $s(t-s)/t$. Συνεπώς, η δεσφευμένη κατανομή της $Y(s) = \sigma X(s)$ δοθέντος $Y(t) = C_1$ είναι κανονική με μέση τιμή sC_1/t και διακύμανση $\sigma^2 s(t-s)/t$. Συνεπώς,

$$P\{Y(1/2) > 0 \mid Y(1) = \sigma\} = P\{N(\sigma/2, \sigma^2/4) > 0\} = \Phi(1) \approx 0.8413.$$

Χρόνος Επίτευξης, Μέγιστη Μεταβολή

Ας συμβολίσουμε με T_a τον χρόνο που η διαδικασία κίνησης Brown επιτυγχάνει (hits) για πρώτη φορά την τιμή a .

Αν $a > 0$ θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(T_a \leq t)$ θεωρώντας την πιθανότητα $P\{X(t) \geq a\}$ και δεσφενόμενοι αν ισχύει ή αν δεν ισχύει $T_a \leq t$. Έχουμε:

$$P\{X(t) \geq a\} = P\{X(t) \geq a \mid T_a \leq t\}P\{T_a \leq t\} + P\{X(t) \geq a \mid T_a > t\}P\{T_a > t\} \quad (5)$$

Αν $T_a \leq t$, η διαδικασία επιτυγχάνει την τιμή a σε κάποια χρονική στιγμή στο διάστημα $[0, t]$ και, λόγω συμμετρίας, είναι ισοπίθανο να βρίσκεται πάνω ή κάτω από το a κατά την χρονική στιγμή t . Οπότε

$$P\{X(t) \geq a \mid T_a \leq t\} = \frac{1}{2}$$

Καθώς ο δεύτερος προσθετέος στο δεξιό μέλος της (5) είναι προφανώς ίσος με μηδέν (αφού, λόγω συνέχειας, η τιμή της διαδικασίας δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από a χωρίς να έχει πετύχει την τιμή a) βλέπουμε ότι:

$$P(T_a \leq t) = 2 \cdot P\{X(t) \geq a\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad a > 0 \quad (6)$$

Για $a < 0$, η κατανομή των T_a είναι, λόγω συμμετρίας, η ίδια με την κατανομή των T_{-a} . Συνεπώς, από την εξίσωση (6), έχουμε ότι:

$$P(T_a \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (7)$$

Μια άλλη τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει είναι η μέγιστη τιμή που η διαδικασία πετυχαίνει στο διάστημα $[0, t]$. Η κατανομή της βρίσκεται ως εξής: Αν $a > 0$

$$P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\right\} = P(T_a \leq t) \quad (\text{λόγω συνέχειας})$$

$$= 2P\{X(t) \geq a\} \quad (\text{από την (6)})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Παραλλαγές της κίνησης Brown

Κίνηση Brown με μετατόπιση

Πέρε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι διαδικασία κίνησης Brown με συντελεστή μετατόπισης (drift coefficient) μ και διακύμανση σ^2 αν

i) $X(0) = 0$

ii) $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

iii) $X(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μt και διακύμανση $\sigma^2 t$

Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι, αν $\{B(t), t \geq 0\}$ είναι η κανονική κίνηση Brown, να ορίσουμε

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t$$

Γεωμετρική Κίνηση Brown

Αν $\{Y(t), t \geq 0\}$ είναι διαδικασία κίνησης Brown με συντελεστή μετατόμισης μ και διακύμανση σ^2 , τότε η διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ που ορίζεται ως

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown.

Για μία γεωμετρική κίνηση Brown $\{X(t), t \geq 0\}$, ας υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας την χρονική στιγμή t δοθείσης της ιστορίας της διαδικασίας μέχρι την χρονική στιγμή s . Δηλαδή, για $s < t$, θεωρούμε την ποσότητα $E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s]$. Βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s] &= E[e^{Y(t)} | Y(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= E[e^{Y(s) + Y(t) - Y(s)} | Y(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= e^{Y(s)} E[e^{Y(t) - Y(s)} | Y(u), 0 \leq u \leq s] \\ &= X(s) E[e^{Y(t) - Y(s)}], \end{aligned}$$

όπου η προτεινόμενη ιδιότητα οφείλεται στο ότι η $Y(s)$ είναι γνωστή, και η τελευταία εξίσωση οφείλεται στην ιδιότητα των ανεξαρτητιών προσαυξήσεων της κίνησης Brown. Η ροπαζενήτρια μιας κανονικής τ.μ. W δίνεται από τον τύπο

$$E[e^{aW}] = e^{aE[W] + a^2 \text{Var}(W)/2}$$

- Συνεπώς, αφού η τ.ρ. $Y(t) - Y(s)$ είναι κανονική με μέση τιμή $\mu(t-s)$ και διακύμανση $(t-s)\sigma^2$, θέτοντας $a=1$ έχουμε ότι:

$$E[e^{Y(t)-Y(s)}] = e^{\mu(t-s) + (t-s)\sigma^2/2}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$E[X(t) | X(u), 0 \leq u \leq s] = X(s)e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)}$$

- Η Γεωμετρική κίνηση Brown είναι χρήσιμη για τη μοντελοποίηση των τιμών μιας μετοχής καθώς προχωρά ο χρόνος, αν πιστεύουμε ότι οι ποσοστιαίες μεταβολές της τιμής της μετοχής είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (δηλαδή έχουν την ίδια κατανομή). Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι X_n είναι η τιμή μιας μετοχής την χρονική στιγμή n . Τότε, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι τ.ρ. X_n/X_{n-1} , $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Έστω

$$Y_n = X_n / X_{n-1}$$

$$\Rightarrow X_n = Y_n X_{n-1}$$

Επαναλαμβάνοντας την τελευταία ιδότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned} X_n &= Y_n Y_{n-1} X_{n-2} \\ &= Y_n Y_{n-1} Y_{n-2} X_{n-3} \\ &\vdots \\ &= Y_n Y_{n-1} \dots Y_1 X_0 \end{aligned}$$

Συνεπώς: $\log(X_n) = \sum_{i=1}^n \log(Y_i) + \log(X_0)$

- Αφού οι τ.ρ. $\log(Y_i)$, $i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, η διαδικασία $\{\log(X_n)\}$, αν κανονικοποιηθεί κατάλληλα, θα είναι κατά προσέγγιση κίνηση Brown με μετατόπιση, και συνεπώς η διαδικασία $\{X_n\}$ θα είναι κατά προσέγγιση γεωμετρική κίνηση Brown

Τιμολόγηση δικαιώματος αγοράς ή πώλησης μετοχών

Σε καταστάσεις κατά τις οποίες χρηματικά ποσά πρόκειται να εισπραχτούν ή να πληρωθούν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, πρέπει να λάβουμε υπόψη την χρονική αξία του χρήματος. Ένα χρηματικό ποσό v το οποίο θα δοθεί την χρονική στιγμή t στο μέλλον δεν έχει την ίδια αξία με το ίδιο v , αν αυτό πρόκειται να δοθεί αμέσως. Αυτό οφείλεται στο ότι, αν σε κάποιον δοθεί αμέσως το ποσό v , έχει τη δυνατότητα να το δανείσει με τόκο και έτσι θα έχει αξία μεγαλύτερη από v την χρονική στιγμή t .

Παίρνοντας υπόψη την παραπάνω παρατήρηση, θα υποθέσουμε ότι η αξία κατά την χρονική στιγμή 0 (που ονομάζεται παρούσα αξία) του ποσού v , το οποίο θα εισπραχτεί την χρονική στιγμή t , είναι $ve^{-\alpha t}$. Ο αριθμός $\alpha > 0$ συχνά ονομάζεται αποπληθωριστικός παράγων (discount factor).

Η υπόθεση της αποπληθωριστικής συνάρτησης $e^{-\alpha t}$ ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι κάποιος εισπρακτής τόκο με συνεχή σύνθετο ρυθμό (continuously compounded rate) ίσο με ποσοτό 100α ανά μονάδα χρόνου.