Επ. Κυριακίδης

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΙΙ

ΕΦ. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Μερικές Γνώσεις από την Θεωρία Πιθανοτήτων:

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι μία μαθηματική θεωρία με τη βοήθεια της οποίας μελετάμε φαινόμενα τα οποία επηρεάζονται από την τύχη.

Παραδείγματα φαινομένων που επηρεάζονται από την τύχη:

1. Το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος: Κορώνα (Κ), Γράμματα (Γ).
2. Το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού: 1,2,…, 6

Παραδείγματα φαινομένων που δεν επηρεάζονται από την τύχη:

1. Το σπάσιμο ενός εύθραυστου ποτηριού όταν αφεθεί να πέσει κάτω από μεγάλο ύψος.
2. Η επιτάχυνση ενός αυτοκινήτου όταν πατάμε γκάζι.

Ο Δειγματικός Χώρος ενός Πειράματος είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συμβολίζεται με Ω. Οι δειγματικοί χώροι των παραπάνω δύο πειραμάτων που επηρεάζονται από την τύχη είναι οι εξής:

Ρίψη ενός νομίσματος : $\Omega = \{K, \Gamma\}$

Ρίψη ενός ζαριού : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ενδεχόμενα ενός πειράματος είναι κάποια (μερικές φορές όλα) υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω.

Π.χ. Στο πείραμα "Ρίψη ενός νομίσματος" το ενδεχόμενο εμφάνισης "κορώνας" είναι το υποσύνολο $\{K\}$ του $\Omega = \{K, \Gamma\}$.

Π.χ. Στο πείραμα "Ρίψη ενός ζαριού" το ενδεχόμενο "άρτιο αποτέλεσμα" είναι το υποσύνολο $\{2,4,6\}$ του $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Θεωρούμε τομές και ενώσεις δύο ή περισσοτέρων ενδεχομένων καθώς επίσης και συμπληρώματα ενδεχομένων.

Παράδειγμα: Στο Πείραμα "Ρίψη ενός ζαριού" θεωρούμε τα ενδεχόμενα
A = "άρτιο αποτέλεσμα" $= \{2,4,6\}$
B = "αποτέλεσμα μεγαλύτερο ή ίσο του 4" $= \{4,5,6\}$

Οπότε: $A \cap B = \{4,6\}$
$A \cup B = \{2,4,5,6\}$
$A^c = \Omega \setminus A = \{1,3,5\}$ = "περιττό αποτέλεσμα".

Θα λέμε ότι το ενδεχόμενο A συνέβη αν το αποτέλεσμα a του πειράματος ανήκει στο A

Παράδειγμα: Το ενδεχόμενο "άρτιο αποτέλεσμα" συνέβη αν το αποτέλεσμα του ζαριού είναι 2 ή 4 ή 6.

Συνολοθεωρητικές Εκφράσεις Καθημερινών Εκφράσεων: Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα ενός πειράματος.

- Η έκφραση "το A δεν συμβαίνει" είναι το ενδεχόμενο A^c
- Η " "μόνο το A συμβαίνει" " " " $A \cap B^c \cap \Gamma^c$
- Η " "τουλάχιστον ένα " " " " " $A \cup B \cup \Gamma$
- Η " "το A και το B συμβαίνουν αλλά όχι το Γ" " " $A \cap B \cap \Gamma^c$

κλπ.

Ορισμός: Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος που επηρεάζεται από την τύχη. Σε κάθε ενδεχόμενο A του πειράματος αντιστοιχούμε μία ποσότητα $P(A)$, που ονομάζεται πιθανότητα του A, και που έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$ γιά κάθε ενδεχόμενο A

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$

εφόσον τα ενδεχόμενα είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή $A_i \cap A_j$, $\forall\ i \neq j$.

Ιδιότητες: $P(A^c) = 1 - P(A)$
$P(\emptyset) = 0$
Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.
$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Πειράματα με Ισοπίθανα Δυνατά Αποτελέσματα:
Έστω ότι $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Έστω επίσης ότι

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}),$$

δηλαδή όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Αυτό συμβαίνει εν γένει στα πειράματα που σχετίζονται με τα τυχερά παιγνίδια. Ισχύει ότι

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}}$$

π.χ. Επιλέγουμε κατά τυχαίο τρόπο και χωρίς επανάθεση 5 χαρτιά από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Τότε:

$$P(\text{να επιλεγούν ακριβώς 2 Ρήγες}) = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

Ορισμός: Έστω A, B ενδεχόμενα με $P(A) \neq 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα του B δοθέντος του A ορίζεται ως εξής: $P(B|A) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

π.χ. Ένα δοχείο περιέχει 15 Άσπρους, 10 Κίτρινους και 5 Μαύρους βώλους. Διαλέγουμε τυχαία ένα βώλο από το δοχείο. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι κίτρινος αν ξέρουμε ότι δεν είναι μαύρος;

Απάντηση: $P(K / M^c) = \dfrac{P(K \cap M^c)}{P(M^c)} = \dfrac{P(K)}{1 - P(M)} = \dfrac{\frac{10}{30}}{1 - \frac{5}{30}} = 0.4$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π.): Έστω A_j, $j = 1, \dots, n$ ασυμβίβαστα (δηλαδή ξένα ανά δύο μεταξύ τους) ενδεχόμενα τέτοια ώστε $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Έστω B ένα ενδεχόμενο. Τότε $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) P(A_j)$.

Παράδειγμα: Ένα αεροπλάνο συνετρίβη σε μία περιοχή που αποτελείται από Δάσος (Δ), Βουνό (Β) και Θάλασσα (Θ) με αντίστοιχες πιθανότητες:

$$P(\text{συντριβή σε } \Delta) = P(\Delta) = 0.1$$
$$P(\text{ " " } \Theta) = P(\Theta) = 0.3$$
$$P(\text{ " " } B) = P(B) = 0.6$$

Έστω Ε το ενδεχόμενο να βρεθεί το αεροπλάνο. Γνωρίζουμε ότι

$$P(E|B) = \frac{3}{4}, \quad P(E|\Theta) = \frac{1}{5}, \quad P(E|\Delta) = \frac{1}{2}$$

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έπεται ότι:

$$P(E) = P(E|B)P(B) + P(E|\Theta)\cdot P(\Theta) + P(E|\Delta)P(\Delta)$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = 0.56$$

Θεώρημα του Bayes Έστω A_j, $j=1,\dots,n$ ασυμβίβαστα ενδεχόμενα τέτοια ώστε $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Τότε ισχύει:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Ορισμός: Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ανεξάρτητα όταν και μόνον όταν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Από τον παραπάνω ορισμό, αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, προκύπτει ότι:

$$P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι η πιθανότητα του ενδεχόμενου Α δεν επηρεάζεται από το αν συνέβη ή όχι το ενδεχόμενο Β.

π.χ. Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 7 Β: το πρώτο ζάρι είναι 1

Είναι τα ενδεχόμενα Α, Β ανεξάρτητα;

Απάντηση: $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$ $\quad A\cap B = \{(1,6)\}$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{36} \qquad P(A) = P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Άρα, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ και, συνεπώς, τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα.

<u>Ορισμός</u>: Τυχαία Μεταβλητή X είναι μία συνάρτηση απο το Ω προς το $\mathbb{R}$. Δηλ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$

<u>Παραδείγματα τυχαίων Μεταβλητών</u>:

<u>π.χ. 1</u> Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Εδώ, $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\dots,6\}$
Ορίζουμε : $X(i,j) = i+j$
Εδώ η τ.μ. εκφράζει το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών.

<u>π.χ. 2</u> Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές. Ορίζουμε
$$X = \#\ \text{εμφανιζομένων κορώνων}$$

<u>π.χ. 3</u> Ανάβουμε μία λάμπα. Έστω X = χρόνος ζωής της λάμπας.

<u>Παρατήρηση</u>: Στα Παραδείγματα (1),(2) οι τ.μ. παίρνουν ακέραιες τιμές. Τέτοιου τύπου τ.μ. ονομάζονται <u>διακριτές</u>. Στο Παράδειγμα (3) η τ.μ. παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. Τέτοιες τ.μ. ονομάζονται <u>συνεχείς</u>. Σχηματικά, λοιπόν, έχουμε την εξής διάκριση:

$$\underline{\text{Τυχαίες Μεταβλητές}} \begin{cases} \nearrow \text{Διακριτές} \\ \searrow \text{Συνεχείς} \end{cases}$$

→ Οι διακριτές τ.μ. χαρακτηρίζονται από τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) που ορίζεται ως εξής :

$P(X=x)$, όπου x είναι μία δυνατή τιμή της X.
Προφανώς ισχύει ότι $\sum_x P(X=x) = 1$

→ Οι συνεχείς τ.μ. χαρακτηρίζονται από μία θετική συνάρτηση $f(\cdot)$ που ονομάζεται πυκνότητα της X και έχει τις εξής ιδιότητες

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \text{και} \quad P(X \in B) = \int_B f(x)dx,$$

όπου B είναι ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών.

π.χ. Αν $B = [\alpha, \beta]$ τότε $P[X \in [\alpha,\beta]] = P[\alpha \leq X \leq \beta] = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

π.χ. Αν $B = [\alpha, \alpha]$ " $P[X \in [\alpha,\alpha]] = P[X = \alpha] = \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Η πιθανότητα δηλαδή να παίρνει μία συνεχής τ.μ. μία συγκεκριμένη τιμή είναι ίση με μηδέν.

Σημαντική Παρατήρηση: Μία διακριτή τ.μ. X ή μία συνεχής τ.μ. X προσδιορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση κατανομής της, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει γιά συνεχείς τ.μ. ότι $F_X'(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}$

Παραδείγματα Διακριτών τ.μ. (κατανομών)

1. Διωνυμική

Λέμε ότι $X \sim \text{Διωνυμική}(\overset{\substack{\text{αριθμός δοκιμών} \\ \uparrow}}{n}, \underset{\hookrightarrow \text{πιθανότητα επιτυχίας}}{p})$ όταν

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$$

2. Poisson

Λέμε ότι $X \sim \text{Poisson}(\lambda), \ \lambda > 0,$ όταν

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

κατανομή Poisson χρησιμοποιείται όταν μας ενδιαφέρει ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σ' ένα χρονικό διάστημα.

Παραδείγματα : # τροχαίων ατυχημάτων κατά το Σαββατοκύριακο
σεισμών κατά τη διάρκεια του χειμώνα
σωματιδίων που εκπέμπει μία ραδιενεργός πηγή σ' ένα χρονικό διάστημα.

Παραδείγματα Συνεχών τ.μ. (κατανομών)

1. Ομοιόμορφη τ.μ. (κατανομή) στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

$X \sim$ Ομοιόμορφη (α,β) όταν η πυκνότητά της έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} (\beta-\alpha)^{-1}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

2. Εκθετική τ.μ.

$X \sim$ Εκθετική (λ), $\lambda>0$, όταν η πυκνότητά της έχει τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα της Εκθετικής Κατανομής είναι ότι δεν έχει μνήμη, δηλαδή,

$$P(X>r+t \mid X>r) = P(X>t), \quad r,t>0 \quad (*)$$

Απόδειξη της (*) : $P(X>r+t \mid X>r) = \dfrac{P(X>r+t,\, X>r)}{P(X>r)}$

$$= \frac{P(X>r+t)}{P(X>r)} = \frac{\int_{r+t}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_{r}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{e^{-\lambda(r+t)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda t} = \int_t^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$= P(X>t).$$

3. Κανονική τ.μ. (Κατανομή)

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$ αν η πυκνότητά της έχει τύπο :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

4. Γάμμα τ.μ. (Κατανομή) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ όταν η πυκνότητά της έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \qquad \alpha, \lambda > 0$$

όπου $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ (συνάρτηση Γάμμα)

Παρατήρηση: Αν $X_1, \ldots, X_k \sim$ Εκθετική(λ) ανεξάρτητες
τότε $X_1 + \ldots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ "κατανομή Erlang-k"

Ορισμός: Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) μιάς τ.μ. X ορίζεται ως εξής:

$$EX = \begin{cases} \sum_x x \cdot P(X=x), & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής με πυκνότητα } f_X(x). \end{cases}$$

π.χ. Αν $X \sim$ Εκθετική(λ) τότε $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

Πρόταση: Έστω X τ.μ. Υποθέτουμε ότι και η $g(X)$ είναι τ.μ.
Τότε:

$$E\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_x g(x) P(X=x), & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx, & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής με πυκνότητα } f_X(x). \end{cases}$$

Ορισμός: Η διασπορά ΔX μιάς τ.μ. X ορίζεται ως εξής:

$$\Delta X = E(X-EX)^2 = \begin{cases} \sum_x (x-EX)^2 P(X=x), & \text{αν } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-EX)^2 f_X(x) dx, & \text{αν } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

Ορισμός: Η τυπική απόκλιση σ_X μιάς τ.μ. X ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της, δηλαδή $\sigma_X = \sqrt{\Delta X}$.

Πρόταση: $\Delta X = EX^2 - (EX)^2$
(Για τον υπολογισμό της διασποράς μιάς τ.μ. X συμφέρει συνήθως αυτός ο τύπος)

Παράδειγμα: Έστω $X \sim$ Poisson(λ), $\lambda > 0$. Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

Απάντηση: $EX = \sum_{x=0}^{\infty} x P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$$\overset{y=x-1}{=} e^{-\lambda}\lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

$$E[X(X-1)] = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^{x-2}}{x!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \overset{y=x-2}{=} \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

Άρα: $EX^2 = E[X(X-1)] + EX = \lambda^2 + \lambda$

Οπότε: $\Delta X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Ορισμός: Η ροπή κ-τάξεως ($\kappa = 1, 2, \dots$) μιάς τ.μ. X ορίζεται ως η ποσότητα EX^k

Ορισμός: Ροπογεννήτρια $M_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ μιάς τ.μ. X είναι η πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X=x), & \text{αν } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & \text{αν } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

Πρόταση: Ισχύει ότι $\mathbb{E}X^k = M_X^{(k)}(0)$.

Σημαντική Παρατήρηση: Η ροπογεννήτρια M_X μιάς τ.μ. X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X.

Παράδειγμα: Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

$M_X'(t) = \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$

$M_X''(t) = (\lambda e^t)^2 \exp\{\lambda(e^t-1)\} + \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$

και συνεπώς, $EX = M_X'(0) = \lambda$, $EX^2 = M_X''(0) = \lambda^2 + \lambda$, $\Delta X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$.

Στοχαστική ανέλιξη (ή στοχαστική διαδικασία) είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t), t \in T$. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών I των τ.μ. $X(t), t \in T$ είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο I θα το ονομάζουμε σύνολο (ή χώρο) καταστάσεων της στοχαστικής ανέλιξης. Η τ.μ. $X(t)$ ερμηνεύεται ως η κατάσταση της ανέλιξης κατά την χρονική στιγμή t.

Έστω $T = [0, +\infty)$

Ορισμός: Η στοχαστική ανέλιξη $X(t), t \geq 0$, με χώρο καταστάσεων το πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο I ονομάζεται Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο αν

$$P[X(t_n) = i_n \mid X(t_0) = i_0, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}] = P[X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}]$$

γιά οποιαδήποτε $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ και $i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n \in I$

Η μαθηματική θεμελίωση της γενικής θεωρίας αυτών των αλυσίδων περιέχει πολλά λεπτά σημεία. Εδώ θα αναλύσουμε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα, τα οποία είναι πολύ σημαντικά: την ανέλιξη Poisson και την απλή ανέλιξη Γεννήσεως - Θανάτου.

Ανέλιξη Poisson

Θεωρούμε μία ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $X(t), t \geq 0$, όπου η ποσότητα $X(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αφίξεων (ή των γεγονότων) που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(0, t)$. Οι αφίξεις συμβαίνουν κατά κάποιο τυχαίο τρόπο. Ο χώρος καταστάσεων είναι $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Υιοθετούμε τα παρακάτω αξιώματα:

(i) Οι αριθμοί των αφίξεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητα κατανεμημένοι. Έχουμε δηλαδή "ανεξάρτητες προσαυξήσεις".

(ii) Η κατανομή της ποσότητας $X(t+h)-X(t)$, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t. Έχουμε δηλαδή "χρονική στασιμότητα."

(iii) $P[X(t+h)-X(t)=1] = \lambda h + o(h)$, καθώς $h \to 0$, γιά κάποιο θετικό αριθμό λ. Εδώ με $o(h)$ συμβολίζουμε μία συνάρτηση του h τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0} o(h)/h = 0$.

(iv) $P[X(t+h)-X(t) \geqq 2] = o(h)$, καθώς $h \to 0$.

Η ανέλιξη $X(t), t \geqq 0$, εφοδιασμένη με τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα ονομάζεται ανέλιξη Poisson. Αποδεικνύεται ότι είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο.

Από τα αξιώματα (iii) & (iv) έχουμε ότι

$$P[X(t+h)-X(t)=0] = 1-\lambda h + o(h), \text{ καθώς } h \to 0.$$

Έστω

$$p_n(t) = P[X(t)=n], \quad n \geq 0.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι: $p_0(0)=1$, $p_n(0)=0$, $n \geq 1$.

Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κατανομή της τ.μ. $X(t), t \geqq 0$. Οι λεγόμενες προδρομικές (forward) εξισώσεις λαμβάνονται ως εξής:

0 $\qquad\qquad$ t $\qquad$ $t+h$

Για $h \to 0$

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h + o(h)) \quad \text{ή}$$

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \quad \text{ή}$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \qquad (*)$$

Αν $n \geq 1$

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda h + o(h))$$ ή

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \qquad (**)$$

Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια της τ.μ. $X(t)$ ως εξής:

$$\phi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n \qquad |z|<1$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις $(**)$ επί z^n και προσθέτοντας στην $(*)$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) z^n$$

δηλαδή,
$$\frac{d\phi(z,t)}{dt} = -\lambda(1-z)\phi(z,t)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται ως εξής:

$$\int \frac{d\phi}{\phi} = -\lambda(1-z)\int dt$$

Ισοδύναμα,
$$\ln\phi = -\lambda(1-z)t + \sigma\tau\alpha\theta.$$

Δηλαδή,
$$\phi(z,t) = f(z)e^{-\lambda(1-z)t}$$

γιά κάποια συνάρτηση $f(z)$, αφού η τιμή της σταθεράς μπορεί να εξαρτάται από την τιμή της z. Η αρχική συνθήκη είναι $\phi(z,0)=1$ που συνεπάγεται ότι

$$\phi(z,t) = e^{-\lambda t(1-z)}$$

Η ροπογεννήτρια της $X(t)$ ως γνωστόν (βλέπε σελ. 9) ορίζεται ως εξής:

$$M(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^t)^n P[X(t)=n] = \phi(e^z,t)$$

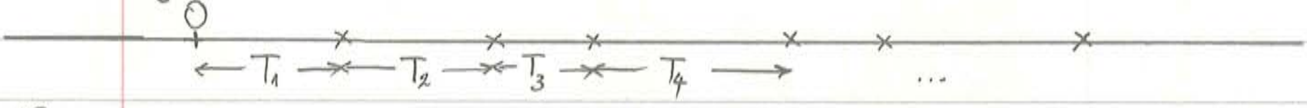
Άρα:
$$M(z,t) = \exp[\lambda t(e^z-1)]$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος της $M(z,t)$ συμπίπτει με τον τύπο της ροπογεννήτριας της Poisson(λt). (βλέπε σελ. 9). Χρησιμοποιώντας τη σημαντική παρατήρηση της σελ. 9 συμπεραίνουμε ότι $X(t) \sim$ Poisson (λt).

Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την 1η άφιξη. Έχουμε ότι

$$P(T_1>t) = P[X(t)=0] = e^{-\lambda t}$$

Άρα η πυκνότητα του T_1 είναι $\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Δηλαδή $T_1 \sim$ Εκθετική(λ).
Γιά $n \geq 2$, έστω T_n ο χρόνος μεταξύ της n-1 και τη n-οστής αφίξεως.



Έχουμε ότι:

$$P(T_{n+1}>t \mid T_1=t_1, T_2=t_2, \dots, T_n=t_n)$$

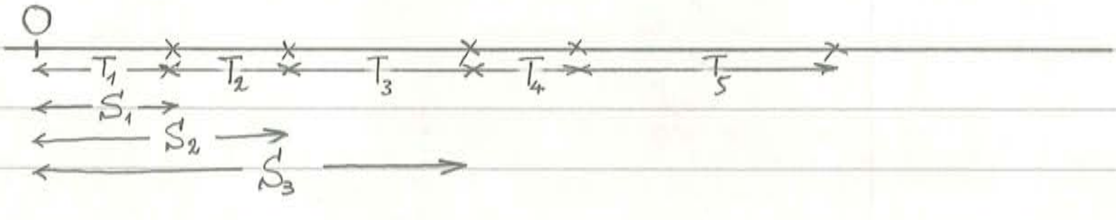
Αξίωμα (i) $$P[X(s+t)-X(s)=0]$$, όπου $s = t_1+\dots+t_n$

Αξίωμα (ii) $$P[X(t)-X(0)=0] = P[X(t)=0] = e^{-\lambda t}$$

Άρα ο χρόνος T_{n+1} είναι ανεξάρτητος των $T_1, \dots, T_n$ και ακολουθεί την Εκθετική(λ). Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία T_n, $n \geq 1$, είναι μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν την Εκθετική(λ).

Πρόβλημα: Έστω μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda>0$. Έστω S_n ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του n-οστού γεγονότος. Βρείτε την κατανομή που ακολουθεί η τ.μ. S_n

Απάντηση:



1ος τρόπος: Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του 1ου γεγονότος και T_i, $i \geq 2$, ο χρόνος που παρεμβάλλεται ανάμεσα στο $(i-1)$-στό και i-στό γεγονός. Προφανώς

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Γνωρίζουμε ότι $X_i \sim$ Εκθετική (λ), $i=1,2,\ldots$ και είναι ανεξάρτητες.
Επομένως: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Γάμμα(n,λ), δηλαδή η πυκνότητα της S_n έχει τύπο:

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0$$

2ος τρόπος: Έστω $F_{S_n}(t)$ η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. S_n. Παρατηρούμε ότι το n-οστό γεγονός πραγματοποιείται πριν ή κατά την χρονική στιγμή t όταν και μόνον όταν ο αριθμός των γεγονότων που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι την χρονική στιγμή t είναι τουλάχιστον n. Δηλαδή,

$$N(t) \geq n \longleftrightarrow S_n \leq t$$

Συνεπώς:

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Παραγωγίζοντας την $F_{S_n}(t)$ ως προς t παίρνουμε την πυκνότητα της $f_{S_n}(t)$:

$$f_{S_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \square$$

Άσκηση: Υποθέτουμε ότι ένας πληθυσμός ατόμων μεταναστεύει σ' ένα μέρος σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 1$ την ημέρα.
(a) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την άφιξη του $10^{ου}$ μετανάστη;
(b) Ποια είναι η πιθανότητα ο χρόνος που παρεμβάλλεται ανάμεσα στην $10^{ην}$ και $11^{ην}$ άφιξη να ξεπερνά τις δύο μέρες;

Απάντηση: (a) $E(S_{10}) = \dfrac{10}{\lambda} = 10$ ημέρες

(b) $T_{11} \sim$ Εκθετική $(\lambda = 1)$

$$P(T_{11} > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-2} \simeq 0.133 \quad \square$$

<u>Πρόβλημα:</u> Έστω ότι μέχρι την χρονική στιγμή t ένα μόνον γεγονός μιάς ανέλιξης Poisson συνέβη. Ποιά είναι η κατανομή του χρόνου κατά τον οποίο το γεγονός συνέβη;

<u>Απάντηση:</u> Γιά $s \leq t$ έχουμε

$$P\{T_1 < s \mid N(t)=1\} = \frac{P\{T_1 < s,\, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$= \frac{P\{1 \text{ γεγονός στο } [0,s),\ \text{κανένα γεγονός στο } [s,t)\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$\overset{\text{Αξίωμα (i)}}{=} \frac{P\{1 \text{ γεγονός στο } [0,s)\}\cdot P\{\text{κανένα γεγονός στο } [s,t)\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

(αυτή είναι η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα $[0,1]$)

<u>Άρα:</u> $T_1 \mid N(t)=1 \sim$ Ομοιόμορφη $(0,1)$

<u>Παρατήρηση:</u> Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί ως εξής: Αν γνωρίζουμε ότι $N(t)=n$ τότε οι χρόνοι $S_1, S_2, \ldots, S_n$ των αφίξεων είναι ανεξάρτητες τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $(0,t)$.

Άσκηση: Κάποια γεγονότα συμβαίνουν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda=2$ ανά ώρα.

(a) Ποιά είναι η πιθανότητα να μη συμβεί κανένα γεγονός ανάμεσα στις 8 και 9 το πρωί;

(b) Ξεκινώντας από το μεσημέρι, ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του $4^{ου}$ γεγονότος;

(c) Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα ανάμεσα στις 6 και 8 το βράδι;

Απάντηση:

(a) $N(t) \sim \text{Poisson}(2t)$

$P\{$να μη συμβεί κανένα γεγονός ανάμεσα στις 8 και 9 το πρωί$\}$

$$= P\{N(1)=0\} = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2}$$

(b) S_4 : Χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του $4^{ου}$ γεγονότος.

$$S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \qquad T_i \sim \text{Εκθετική}(2),\ i=1,2,3,4.$$

$$\mathbb{E}(S_4) = ET_1 + ET_2 + ET_3 + ET_4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2$$

(c) $P\{$να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα ανάμεσα στις 6 και 8 το βράδι$\}$

$$= P\{N(2\cdot 2) \geqq 2\} = 1 - P\{N(4)=0\} - P\{N(4)=1\}$$

$$= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}.$$

Άσκηση: Πελάτες φθάνουν σε μία τράπεζα σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Υποθέτουμε ότι δύο πελάτες έφθασαν κατά τη διάρκεια της $1^{ης}$ ώρας. Ποιά είναι η πιθανότητα

(a) να έφθασαν και οι δύο πελάτες κατά τα πρώτα 20 λεπτά;

(β) να έφθασε τουλάχιστον ένας από τους πελάτες κατά τη διάρκεια των πρώτων 20 λεπτών;

<u>Απάντηση</u>: $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

(a) $$P[N(\tfrac{1}{3})=2 \mid N(1)=2] = \frac{P[N(\frac{1}{3})=2,\ N(1)=2]}{P[N(1)=2]} = \frac{P[N(1/3)=2]\, P[N(\frac{2}{3})=0]}{P[N(1)=2]}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\lambda}{3}} \frac{(\lambda/3)^2}{2!} \cdot e^{-\frac{2}{3}\lambda} \frac{(\frac{2}{3}\lambda)^0}{0!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{1}{9}$$

(b) $$P[N(1/3) \geq 1 \mid N(1)=2] = P[N(1/3)=1 \mid N(1)=2] + \underbrace{P[N(\tfrac{1}{3})=2 \mid N(1)=2]}_{1/9}$$

$$P[N(1/3)=1 \mid N(1)=2] = \frac{P[N(1/3)=1,\ N(1)=2]}{P[N(1)=2]} = \frac{P[N(1/3)=1] \cdot P[N(2/3)=1]}{P[N(1)=2]}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\frac{1}{3}} \frac{\lambda/3}{1!} \cdot e^{-\lambda\frac{2}{3}} \frac{\frac{2}{3}\lambda}{1!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{4}{9}$$

συνεπώς, $$P[N(1/3) \geq 1 \mid N(1)=2] = \frac{5}{9}.$$

<u>Άσκηση</u>: Γιά μία ανέλιξη Poisson δείξτε ότι γιά $s<t$

$$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad ; k=0,1,\dots,n$$

<u>Απάντηση</u>: $$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\} = \frac{P\{N(s)=k,\ N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}$$

$$= \frac{P\{N(s)=k,\ N(t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}} \overset{\text{Αξίωμα (i)}}{=} \frac{P\{N(s)=k\} \cdot P\{N(t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}}$$

$$\overset{\text{Αξίωμα (ii)}}{=} \frac{P\{N(s)=k\} \cdot P\{N(t-s)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}} = \frac{e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}\, e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

<u>Άσκηση</u>: Ο αριθμός των ωρών ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις ενός τρένου σ' έναν σταθμό ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Οι επιβάτες φθάνουν στον σταθμό σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό 7 ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι κάποιο τρένο μόλις έφυγε

από τον σταθμό. Έστω X ο αριθμός των επιβατών που θα επιβιβαστούν στο επόμενο τρένο. Βρείτε την $E(X)$

Απάντηση: Προτού δώσουμε την απάντηση του προβλήματος θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι αν X, Y είναι δύο τ.μ. τότε

$$EX = \begin{cases} \sum_y E(X|Y=y)P(Y=y), & \text{αν } Y \text{ διακριτή.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y)f_Y(y)dy, & \text{αν } Y \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

Εδώ θα εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο με

X = # επιβατών που θα επιβιβαστούν στο επόμενο τρένο
Y = χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου τρένου $\sim$ Ομοιόμορφη $(0,1)$.

συνεπώς:
$$EX = \int_0^1 E(X|T=t)f_Y(y)dy = \int_0^1 (7t)\cdot 1\, dy$$
$$= 7\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{7}{2}.$$

Πρόβλημα: Έστω $X(t)$ μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Υποθέτουμε ότι κάθε φορά που συμβαίνει κάποιο γεγονός, αυτό ταξινομείται ως γεγονός τύπου I ή τύπου II με αντίστοιχες πιθανότητες p και $1-p$ ανεξάρτητα από όλα τα άλλα γεγονότα. Έστω $X_1(t), X_2(t)$ οι αριθμοί των γεγονότων τύπου I και II, αντίστοιχα, που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Δείξτε ότι:

$$P[X_1(t)=n] = e^{-\lambda t p}\frac{(\lambda t p)^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots$$

$$P[X_2(t)=m] = e^{-\lambda t(1-p)}\frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}, \quad m=0,1,\dots$$

$$P[X_1(t)=n, X_2(t)=m] = \sum_{k=0}^{\infty} P[X_1(t)=n, X_2(t)=m \mid X(t)=k] P[X(t)=k]$$

Ισχύει: $P[X_1(t)=n, X_2(t)=m \mid X(t)=k] = 0$, αν $k \neq n+m$

Άρα:

$$P[X_1(t)=n, X_2(t)=m] = P[X_1(t)=n, X_2(t)=m \mid X(t)=n+m] \cdot P[X(t)=n+m]$$

$$= P[X_1(t)=n, X_2(t)=m \mid X(t)=n+m] \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

Άρα:

$$P[X_1(t)=n] = \sum_{m=0}^{\infty} P[X_1(t)=n, X_2(t)=m]$$

$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$P[X_2(t)=m] = e^{-\lambda t(1-p)} \frac{[\lambda t(1-p)]^m}{m!}, \quad m=0,1,\ldots$$

Σημείωση: Αποδείχθηκε ότι $X_1(t) \sim Poisson(\lambda p)$ και ότι $X_2(t) \sim Poisson[\lambda(1-p)]$.

Παράδειγμα: Αν οι μετανάστες προς μία περιοχή A φθάνουν σ' αυτήν σύμφωνα με την ανέλιξη Poisson με ρυθμό 10 ανά εβδομάδα και κάθε μετανάστης είναι αγγλικής καταγωγής με πιθανότητα $\frac{1}{12}$, ποιά είναι η πιθανότητα να μην μεταναστεύει κανένας που έχει αγγλική καταγωγή στην περιοχή A κατά τη διάρκεια του Φεβρουαρίου;

Απάντηση: Βάσει της προηγούμενης σημείωσης ο αριθμός των ατόμων με αγγλική καταγωγή που μεταναστεύουν στην περιοχή A, κατά τη διάρκεια του Φεβρουαρίου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο ίση με $4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{12} = \frac{10}{3}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $e^{-10/3}$.

<u>Άσκηση</u>: Παλμοί φθάνουν σ' έναν αριθμητή Geiger σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό ίσο με τρεις παλμούς ανά λεπτό. Κάθε παλμός που φθάνει στον αριθμητή καταγράφεται με πιθανότητα 2/3. Έστω $X(t)$ ο αριθμός των καταγραφέντων παλμών μέχρι την χρονική στιγμή t.

(a) $P[X(t)=0] =$;

(b) $E[X(t)] =$;

<u>Απάντηση</u>: $X(t) \sim \text{Poisson}(\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} t)$

Άρα: $P\{X(t)=0\} = e^{-2t}$ $\quad E\{X(t)\} = 2t$

<u>ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΑΝΕΛΙΞΗ POISSON</u>

<u>Ορισμός</u>: Η στοχ. ανέλιξη $X(t), t \geqq 0$, είναι μη ομογενής ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda(t), t \geqq 0$, όταν

(i) $X(0) = 0$

(ii) Η $X(t), t \geqq 0$, έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(iii) $P[X(t+h) - X(t) \geqq 2] = o(h)$, καθώς $h \to 0$

(iv) $P[X(t+h) - X(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$, καθώς $h \to 0$

Βλέπουμε ότι εδώ ο ρυθμός πραγματοποίησης των γεγονότων (αφίξεων) εξαρτάται από το t.

<u>Πρόταση</u>: $$P[X(t+s) - X(t) = n] = e^{-[m(t+s)-m(t)]} \frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!},$$

$n \geqq 0$,

όπου $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds.$

Απόδειξη: Έστω t σταθερό και

$$p_n(s) = P[X(t+s) - X(t) = n]$$

$$p_0(s+h) = P[N(t+s+h) - X(t) = 0]$$

$= P[$κανένα γεγονός στο διάστημα $(t, t+s)$, κανένα γεγονός στο διάστημα $[t+s, t+s+h]]$

$\overset{(ii)}{=} P[$κανένα γεγονός στο διάστημα $(t, t+s)] P[$κανένα γεγονός στο $[t+s, t+s+h]]$

$$\overset{(iii)\&(iv)}{=} p_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)]$$

Άρα: $\dfrac{p_0(s+h) - p_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)p_0(s) + \dfrac{o(h)}{h}, \quad h \to 0.$

συνεπώς $p_0'(s) = -\lambda(t+s)p_0(s)$

ή $\dfrac{p_0'(s)}{p_0(s)} = -\lambda(t+s)$ ή $\displaystyle\int_0^s \frac{p_0'(u)}{p_0(u)}du = -\int_0^s \lambda(t+u)du$

ή $\ln p_0(s) - \cancelto{0}{\ln p_0(0)} = -\displaystyle\int_t^{t+s} \lambda(y)dy$

ή $p_0(s) = e^{-\int_t^{t+s}\lambda(y)dy} = e^{-[m(t+s) - m(t)]}$

Η επαλήθευση του τύπου γιά $n \geq 1$ αφήνεται ως άσκηση.

Σημείωση: Η σημασία της μη ομογενούς ανέλιξης Poisson έγκειται στο γεγονός ότι δεν επιβάλλουμε την υπόθεση περί χρονικής στασιμότητας. Έτσι αφήνουμε την δυνατότητα να πραγματοποιούνται με μεγαλύτερη πιθανότητα οι αφίξεις κατά τη διάρκεια κάποιων χρονικών διαστημάτων της ημέρας.

Άσκηση: Ο κος Γιάννης έχει ένα ανθοπωλείο, το οποίο ανοίγει στις 8 το πρωί. Από τις 8 μέχρι τις 11 το πρωί οι πελάτες έρχονται στο ανθοπωλείο (κατά μέσο όρο) μ' έναν σταθερά αυξανόμενο ρυθμό που έχει μία αρχική τιμή 5 πελάτες την ώρα στις 8 το πρωί και φθάνει τους 20 πελάτες την ώρα στις 11 το πρωί. Από τις 11 μέχρι τις 1 το μεσημέρι ο μέσος ρυθμός φαίνεται να παραμένει σταθερός ίσος με 20 πελάτες την ώρα. Όμως ο μέσος ρυθμός άφιξης των πελατών μετά μειώνεται σταθερά από τις 1 το μεσημέρι μέχρι τις 5 το απόγευμα. Στις 5 το απόγευμα ο ρυθμός άφιξης των πελατών είναι ίσος με 12 πελάτες την ώρα. Εκείνη τη στιγμή κλείνει το ανθοπωλείο. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί των πελατών που φθάνουν στο ανθοπωλείο του κου Γιάννη κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητοι, ποιό είναι ένα κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο που περιγράφει τον αριθμό των πελατών που έρχονται στο ανθοπωλείο; Ποιά είναι η πιθανότητα να μην έρθει κανένας πελάτης στο χρονικό διάστημα 8:30 − 9:30 το πρωί της Δευτέρας; Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός αφίξεων κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος;

Απάντηση: Ένα κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο γιά τον αριθμό των αφίξεων των πελατών είναι η μη ομογενής ανέλιξη Poisson με ρυθμό

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 8 \\ 5+5(t-8) & 8 \leq t \leq 11 \\ 20 & 11 \leq t \leq 13 \\ 20-2(t-13) & 13 \leq t \leq 17 \\ 0 & 17 < t \leq 24 \end{cases}$$

και $\lambda(t) = \lambda(t-24)$, $t > 24$.

Αφού ο αριθμός των αφίξεων στο διάστημα 8:30 − 9:30 ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $m(\frac{19}{2}) - m(\frac{17}{2})$ συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα να ισούται αυτός ο αριθμός με μηδέν είναι ίση με $\exp\left\{-\int_{17/2}^{19/2}[5+5(t-8)]dt\right\} = e^{-10}$

και ο αναμενόμενος αριθμός των αφίξεων σ' αυτό το διάστημα ισούται με

$$\int_{17/2}^{19/2}[5+5(t-8)]dt = 10 \qquad \square$$

<u>Άσκηση:</u> Μία διδιάστατη διαδικασία Poisson είναι μία διαδικασία γεγονότων στο επίπεδο που συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο έτσι ώστε

(i) Γιά οποιαδήποτε περιοχή εμβαδού A ο αριθμός των γεγονότων σ' αυτήν την περιοχή ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή λA

(ii) Οι αριθμοί γεγονότων σε μη επικαλυπτόμενες περιοχές είναι ανεξάρτητοι.

Σε μία τέτοια διαδικασία ας θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο σημείο στο επίπεδο και ας συμβολίσουμε με X την απόσταση αυτού από το κοντινότερο γεγονός. Δείξτε ότι

(a) $P\{X>t\} = e^{-\lambda\pi t^2}$ (b) $E(X) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$

<u>Απάντηση:</u>

(a) $P\{X>t\} = P\{$σε κύκλο ακτίνας t να μην υπάρχη γεγονός$\}$

$$= e^{-\lambda\pi t^2}\frac{(\pi t^2)^0}{0!} = e^{-\lambda\pi t^2}.$$

(b) Η πυκνότητα της X δίνεται απο τον τύπο

$$f_X(t) = \frac{d}{dx}[1-P(X>t)] = F_X'(t) = \left(1-e^{-\lambda\pi t^2}\right)'$$
$$= 2\lambda\pi t e^{-\lambda\pi t^2}, \quad t>0$$

<u>Άρα:</u> $E(X) = \int_0^\infty f_X(t)t\,dt = \int_0^\infty 2\lambda\pi t^2 e^{-\lambda\pi t^2}dt = -\int_0^\infty t\left(e^{-\lambda\pi t^2}\right)'dt$

$$= \underbrace{-te^{-\lambda\pi t^2}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-\lambda\pi t^2}dt \overset{x=t\sqrt{2\lambda\pi}}{=\!=\!=} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\lambda\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \qquad \left[\text{αφού } \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1\right].$$

Απλή Ανέλιξη Γεννήσεως - Θανάτου

Υποθέτουμε τώρα ότι σ' ένα χρονικό διάστημα μήκους h, καθώς $h \to 0$, ένα συγκεκριμένο άτομο ενός πληθυσμού γεννά ένα νέο άτομο με πιθανότητα $\lambda h + o(h)$ ή πεθαίνει με πιθανότητα $\mu h + o(h)$, όπου $\lambda, \mu > 0$. Τα διαφορετικά άτομα συμπεριφέρονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και από την προηγούμενη ιστορία της ανέλιξης.

Αν την χρονική στιγμή t υπάρχουν n άτομα στον πληθυσμό τότε η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς μία γέννηση στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, καθώς $h \to 0$, είναι ίση με:

$$\binom{n}{1}[\lambda h + o(h)][1 - \lambda h + o(h)]^{n-1} = n\lambda h + o(h)$$

Ομοίως, η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένας θάνατος είναι ίση με $\mu n h + o(h)$. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από ένα γεγονότα στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, καθώς $h \to 0$, είναι ίση με $o(h)$.

Έστω $X(t)$, $t \geq 0$, το μέγεθος του πληθυσμού κατά την χρονική στιγμή $t \geq 0$. Η ανέλιξη $X(t)$, $t \geq 0$, είναι μία Μαρκοβιανή ανέλιξη σε συνεχή χρόνο. Ονομάζεται απλή ανέλιξη γεννήσεως - θανάτου με ρυθμούς γέννησης και θανάτου ανά άτομο λ και μ, αντίστοιχα.

Ο χώρος των καταστάσεων εδώ είναι το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Για $n \geq 1$ και $h \to 0$ έχουμε:

$$P[X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = n] = \lambda n h + o(h)$$

$$P[X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = n] = \mu n h + o(h)$$

$$P[X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n] = 1 - \lambda n h - \mu n h + o(h)$$

$$P[X(t+h) - X(t) = j \mid X(t) = n] = o(h), \text{ για } j \notin \{0, 1, -1\}.$$

Η κατάσταση 0 είναι μία κατάσταση απορρόφησης. Αντιστοιχεί στην εξάλειψη του πληθυσμού.

Ένας συνοπτικός τρόπος παρουσίασης των μεταβάσεων της ανέλιξης και των αντιστοίχων ρυθμών είναι ο εξής:

μετάβαση	ρυθμός	
$n \to n+1$	$\lambda \cdot n$	$n \geq 1$
$n \to n-1$	$\mu \cdot n$	$n \geq 1$

Μας ενδιαφέρει η μελέτη της κατανομής της τ.μ. $X(t)$. Ορίζουμε:

$$p_n(t) = P[X(t)=n], \quad n \geq 0.$$

Ως αρχική συνθήκη θεωρούμε τη σχέση: $p_\xi(0) = P[X(0)=\xi] = 1$

Οι προδρομικές εξισώσεις του Kolmogorov λαμβάνονται ως εξής:

Γιά $n \geq 1$ και $h \to 0$ έχουμε:

$$p_n(t+h) = p_n(t)[1-\lambda nh - \mu nh + o(h)] + p_{n-1}(t)[\lambda(n-1)h + o(h)] + p_{n+1}(t)[\mu(n+1)h + o(h)]$$

Γιά $n=0$ και $h \to 0$ έχουμε:

$$p_0(t+h) = p_0(t) + p_1(t)[\mu h + o(h)]$$

Προκύπτουν λοιπόν οι εξής διαφοροδιαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)np_n(t) + \lambda(n-1)p_{n-1}(t) + \mu(n+1)p_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \qquad (*)$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t) \qquad (**)$$

Γιά την λύση των (*) & (**) χρησιμοποιούμε την τεχνική της πιθανογεννήτριας. Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια της τ.μ. $X(t)$, δηλαδή τη συνάρτηση

$$\phi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \quad |z|<1$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (*) & (**) επί z^n και προσθέτοντας το αποτέλεσμα κατά μέλη έχουμε :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n}{dt} z^n = -(\lambda+\mu) z \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) z^{n-1} + \lambda z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) z^{n-2} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n$$

δηλαδή,
$$\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu) z \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} + \lambda z^2 \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} + \mu \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z}$$

ή, ισοδύναμα,
$$\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} = (\lambda z - \mu)(z-1) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \qquad (***)$$

Για τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (***) χρησιμοποιούμε τη γνωστή μέθοδο Lagrange που παραθέτουμε παρενθετικά παρακάτω:

<u>Παρένθεση</u> (Μέθοδος Lagrange) : Έστω ϕ μία συνάρτηση των z και t που ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$A \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} + B \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} = C$$

όπου A, B, C είναι συναρτήσεις των z, t, ϕ. Θεωρούμε τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$\frac{dt}{A} = \frac{dz}{B} = \frac{d\phi}{C}$$

Βρίσκουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις των βοηθητικών εξισώσεων. Αυτές έχουν την μορφή :

$$u(z,t,\phi) = \text{σταθερά}$$
$$v(z,t,\phi) = \text{σταθερά}$$

Μία γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\psi(u,v) = 0$$

όπου ψ είναι κάποια αυθαίρετη συνάρτηση. Ισοδύναμα, μία γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$u = f(v)$$

όπου f είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση.

Επανερχόμαστε στη λύση της (***). Εδώ οι βοηθητικές εξισώσεις είναι

$$\frac{dt}{1} = \frac{-dz}{(\lambda z-\mu)(z-1)} = \frac{d\phi}{0}$$

Πρέπει $d\phi = 0$, δηλαδή ϕ = σταθερά. Αυτή είναι η μία από τις δύο ανεξάρτητες λύσεις. Γιά να βρούμε τη δεύτερη λύση πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1η</u> : $\lambda \neq \mu$

$$dt = \frac{dz}{\lambda-\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda z-\mu} - \frac{1}{z-1}\right)$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε :

$$v = \frac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t} = \text{σταθερά}$$

Συνεπώς η γενική λύση της (***) έχει την εξής μορφή :

$$\phi(z,t) = f\left(\frac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right)$$

Η f προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη στο $t=0$. Δηλαδή τη συνθήκη:

$$z^{\xi} = \phi(z,0) = f\left(\frac{z-1}{\lambda z-\mu}\right)$$

Θέτοντας $u = \frac{z-1}{\lambda z-\mu}$ έχουμε $z = \frac{\mu u-1}{\lambda u-1}$

άρα: $f(u) = \left(\frac{\mu u-1}{\lambda u-1}\right)^{\xi}$

Συνεπώς :

$$\phi(z,t) = \left(\frac{\frac{\mu(z-1)}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\frac{\lambda(z-1)}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t} - 1}\right)^{\xi}$$

άρα: $$\phi(z,t) = \left(\frac{\mu(z-1)e^{(\lambda-\mu)t} + \mu - \lambda z}{\lambda(z-1)e^{(\lambda-\mu)t} + \mu - \lambda z}\right)^{\xi}$$

Περίπτωση 2η: $\lambda = \mu$

Η $\phi(z,t)$ μπορεί να βρεθεί με την προηγούμενη μέθοδο (άσκηση).

Μία άλλη μέθοδος είναι να θέσουμε $\lambda = \mu + h$, να εφαρμόσουμε τον προηγούμενο τύπο και να πάρουμε το όριο γιά $h \to 0$. Έχουμε:

$$\phi(z,t) = \left\{ \frac{\mu(z-1)(1+ht+o(h)) + \mu - (\mu+h)z}{(\mu+h)(z-1)(1+ht+o(h)) + \mu - (\mu+h)z} \right\}^{\xi} = \left\{ \frac{\mu(z-1)th - hz + o(h)}{\mu(z-1)th - h + o(h)} \right\}^{\xi}$$

$$\longrightarrow \left\{ \frac{\mu(z-1)t - z}{\mu(z-1)t - 1} \right\}^{\xi}, \quad \text{καθώς } h \to 0.$$

Από τον ορισμό της $\phi(z,t)$ προκύπτει ότι οι πιθανότητες $p_n(t)$ εξάγονται από τον τύπο:

$$p_n(t) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \phi(z,t)}{\partial z^n} \right]_{z=0}$$

Ορίζουμε: $\quad m(t) = E[X(t)], \; t \geq 0$

Παρατηρούμε ότι: $\quad \left[\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \right]_{z=1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \cdot n = m(t)$

Παραγωγίζοντας την (***) ως προς z έχουμε

$$\frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t \partial z} = (\lambda z - \mu)(z-1) \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial z^2} + \lambda(z-1)\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} + (\lambda z - \mu)\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z}$$

Θέτοντας $z = 1$ προκύπτει ότι

$$\frac{dm(t)}{dt} = (\lambda - \mu) m(t)$$

με αρχική συνθήκη

$$m(0) = \xi.$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$m(t) = \xi e^{(\lambda-\mu)t}, \quad t \geq 0$$

Γιά να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $X(t)$, καθώς $t \to \infty$, αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ποσότητας $\phi(z,t)$, καθώς $t\to\infty$. Παρατηρούμε ότι:

αν $\lambda=\mu$ τότε $\phi(z,t)\longrightarrow 1$ καθώς $t\to\infty$
αν $\lambda<\mu$ τότε $\phi(z,t)\longrightarrow 1$ καθώς $t\to\infty$
αν $\lambda>\mu$ τότε $\phi(z,t)\longrightarrow\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\xi}$ καθώς $t\to\infty$

Δηλαδή, $p_0(t)=\phi(0,t)\longrightarrow 1$ καθώς $t\to\infty$ αν $\lambda\leq\mu$
και $p_0(t)=\phi(0,t)\longrightarrow\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\xi}$ καθώς $t\to\infty$ αν $\lambda>\mu$

Αυτό σημαίνει ότι αν $\lambda\leq\mu$ τότε ο πληθυσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα 1 ενώ αν $\lambda>\mu$ ο πληθυσμός εξαλείφεται τελικά με πιθανότητα $(\mu/\lambda)^{\xi}$.

Στοιχεία από τη Θεωρία Ουρών

Η Θεωρία Ουρών ασχολείται με στοχαστικά μοντέλα στα οποία πελάτες φθάνουν με κάποιο τυχαίο τρόπο σ' ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Μόλις φθάσουν υποχρεώνονται να περιμένουν σε μία ουρά μέχρι να έρθει η σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Μόλις εξυπηρετηθούν εν γένει εγκαταλείπουν το σύστημα. Γιά τέτοιου τύπου μοντέλα μάς ενδιαφέρει να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες όπως ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα (ή στην ουρά) και ο μέσος χρόνος κατά τον οποίο ένας πελάτης βρίσκεται στο σύστημα (ή στην ουρά).

Θα δώσουμε δύο τύπους, οι οποίοι εν γένει ισχύουν για όλα τα μοντέλα ουρών. Έστω λ_a ο μέσος ρυθμός άφιξης των πελατών που έρχονται στο σύστημα εξυπηρέτησης. Δηλαδή,

$$\lambda_a = \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t}$$

όπου $N(t)$ ισούται με τον αριθμό των πελατών που έχουν φθάσει στην ουρά μέχρι την χρονική στιγμή t. Έστω:

L : Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα.
L_Q : Ο μέσος αριθμός των πελατών που περιμένουν στην ουρά.
W : Ο μέσος χρόνος κατά τον οποίο ένας πελάτης βρίσκεται στο σύστημα.
W_Q : Ο μέσος χρόνος κατά τον οποίο ένας πελάτης βρίσκεται στην ουρά περιμένοντας να εξυπηρετηθεί.

Τότε:
$$L = \lambda_a W \qquad (1)$$
και
$$L_Q = \lambda_a W_Q \qquad (2)$$

Ο τύπος (1) είναι γνωστός ως τύπος του Little. Θα εφαρμόσουμε τους τύπους (1) και (2) σε συγκεκριμένα μοντέλα ουρών.

Εκθετικά Μοντέλα

1. Εκθετικό μοντέλο με έναν υπηρέτη (server)

Υποθέτουμε ότι οι πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα εξυπηρέτησης, που έχει έναν υπηρέτη (server), σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$. Αυτό σημαίνει ότι οι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$. Κάθε πελάτης, μόλις φθάσει, πηγαίνει κατευθείαν να εξυπηρετηθεί αν ο υπηρέτης είναι ελεύθερος. Αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος, τότε ο πελάτης πηγαίνει και περιμένει στην ουρά. Όταν ο υπηρέτης εξυπηρετήσει έναν πελάτη, ο πελάτης φεύγει από το σύστημα και ο επόμενος πελάτης (αν υπάρχει) που περιμένει στη γραμμή εξυπηρετείται. Οι διαδοχικοί χρόνοι των εξυπηρετήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$ και είναι ανεξάρτητοι.

Το παραπάνω σύστημα ονομάζεται ουρά $M/M/1$. Σ' αυτό το σύμβολο τα δύο M προκύπτουν από το γεγονός ότι οι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις και οι χρόνοι των εξυπηρετήσεων είναι εκθετικοί (και συνεπώς δεν έχουν μνήμη, δηλαδή Μαρκοβιανοί) και το 1 προκύπτει από το γεγονός ότι ο υπηρέτης είναι ένας.

Έστω $X(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα κατά την χρονική στιγμή t. Αν θεωρήσουμε ως αρχική συνθήκη ότι $X(0)=k$ και ορίσουμε $p_n(t) = P[X(t)=n]$, $n=0,1,\dots$ έχουμε τις εξής προδρομικές εξισώσεις του Kolmogorov

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n=1,2,\dots$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Η εύρεση των πιθανοτήτων $p_n(t)$, $n=0,1,\dots$ δεν είναι εύκολο πρόβλημα. Απλώς παραθέτουμε τη λύση, η οποία είναι:

$$p_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\rho^{\frac{n-k}{2}} I_{n-k}(\gamma t) + \rho^{\frac{n-k-1}{2}} I_{n+k+1}(\gamma t) + (1-\rho)\rho^{n}\sum_{j=n+k+2}^{\infty} \rho^{-\frac{j}{2}} I_j(\gamma t)\right]$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$, $\gamma = 2\mu\sqrt{\rho}$, $I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{(n+m)!\,m!}$, $n \geq -1$,

δηλαδή $I_n(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, τάξης n.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η μεταβατικές πιθανότητες $p_n(t)$ της στοχαστικής διαδικασίας $X(t), t \geq 0$ έχουν πολύπλοκη μορφή. Η οριακή συμπεριφορά της $X(t), t \geq 0$, η οποία έχει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, μπορεί να μελετηθεί εύκολα μαθηματικά. Έστω

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = n\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

οι οριακές πιθανότητες. Αποδεικνύεται ότι P_n είναι το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο (μακροπρόθεσμα) ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι ίσος με n. Γιά παράδειγμα αν $P_0 = 0.3$, τότε το σύστημα θα είναι άδειο κατά το 30% του χρόνου.

Ο υπολογισμός των οριακών πιθανοτήτων P_n, $n = 0, 1, \ldots$ είναι εύκολος. Θα εφαρμόσουμε την παρακάτω αρχή:

"Γιά κάθε $n \geq 0$, ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση n ισούται με τον ρυθμό με τον οποίο εγκαταλείπει την κατάσταση n."

Οπότε:

$$\lambda \cdot P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda + \mu) \cdot P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται εξισώσεις ισορροπίας (balance equations). Για να βρούμε τη λύση τους τις γράφουμε ως εξής:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}\right), \quad n \geq 1$$

Οπότε:

$$P_0 = P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \left(P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$P_4 = \frac{\lambda}{\mu}P_3 + \left(P_3 - \frac{\lambda}{\mu}P_2\right) = \frac{\lambda}{\mu}P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu}P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu}P_{n-1}\right) = \frac{\lambda}{\mu}P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} P_0$$

Γιά να προσδιορίσουμε το P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τό άθροισμα των πιθανοτήτων P_n είναι 1. Οπότε,

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{P_0}{1-\lambda/\mu} \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Οπότε: $\quad P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad n = 1, 2, \ldots$

Σημείωση: Στην παραπάνω σχέση για να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ πρέπει $\lambda < \mu$. Αν $\lambda \geq \mu$ τότε δεν υπάρχει οριακή κατανομή της $X(t)$ καθώς $t \to \infty$.

Οι ποσότητες L, L_Q, W, W_Q μπορούν εύκολα να υπολογιστούν μέσω των οριακών πιθανοτήτων P_n, $n = 0, 1, \ldots$ Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα ισούται με

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την αλγεβρική ταυτότητα

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Οι ποσότητες W, W_Q, L_Q μπορούν τώρα να βρεθούν με τη βοήθεια των τύπων (1) και (2). Έχουμε ότι: $\lambda_a = \lambda$ και

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_Q = W - E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη}) = W - \frac{1}{\mu}$$
$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Υποθέτουμε ότι οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό ένας κάθε 12 λεπτά, και ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικός με ρυθμό μία εξυπηρέτηση κάθε 8 λεπτά. Βρείτε τις ποσότητες L και W.

<u>Απάντηση:</u> Αφού $\lambda = \frac{1}{12}$ και $\mu = \frac{1}{8}$ έχουμε ότι

$$L = 2, \quad W = 24$$

Άρα, ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι δύο και ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης βρίσκεται στο σύστημα είναι 24 λεπτά.

2. Εκθετικό Μοντέλο μ' έναν υπηρέτη και πεπερασμένη χωρητικότητα

Τροποποιούμε το προηγούμενο μοντέλο θέτοντας τον περιορισμό ότι το σύστημα δεν χωράει περισσότερους από τους N πελάτες. Ο χώρος καταστάσεων τώρα της διαδικασίας γίνεται $I = \{0, 1, \ldots, N\}$

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1 \\ (\lambda+\mu) P_n &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \qquad 1 \leq n \leq N-1 \\ \mu P_N &= \lambda P_{N-1} \end{aligned}$$

Για να τις λύσουμε τις γράφουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} &= \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}\right), \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ P_N &= \frac{\lambda}{\mu} P_{N-1} \end{aligned}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε όλες τις πιθανότητες P_n, $n = 0, 1, \ldots$ συναρτήσει της P_0 ως εξής:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \left(P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_{N-1} = \frac{\lambda}{\mu} P_{N-2} + \left(P_{N-2} - \frac{\lambda}{\mu} P_{N-3}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1} P_0$$

$$P_N = \frac{\lambda}{\mu} P_{N-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N P_0$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$ έχουμε:

$$1 = P_0 \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \frac{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}{1-\lambda/\mu}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}$$

Οπότε:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n (1-\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}} \qquad n = 0, 1, \ldots, N$$

Σημείωση: Σε αυτό το μοντέλο ο περιορισμός $\lambda < \mu$ γιά την ύπαρξη οριακής κατανομής της $X(t)$ καθώς $t \to \infty$ δεν είναι απαραίτητος όπως στο προηγούμενο μοντέλο.

Όπως προηγουμένως μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα L με τη βοήθεια των πιθανοτήτων P_n, $n = 0, 1, \ldots$ ως εξής:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda\left[1 + N(\lambda/\mu)^{N+1} - (N+1)(\lambda/\mu)^N\right]}{(\mu-\lambda)\left(1-(\lambda/\mu)^{N+1}\right)}$$

Άσκηση: Υποθέτουμε ότι μας κοστίζει $c\mu$ δρχ. την ώρα όταν παρέχουμε υπηρεσία με ρυθμό ίσο με μ. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ένα κέρδος ίσο με A δρχ. όταν εξυπηρετείται ένας πελάτης. Αν η χωρητικότητα του συστήματος είναι ίση με N, ποιά τιμή του μ μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος;

Απάντηση: Κατά τη διάρκεια μιάς ώρας το καθαρό κέρδος ισούται με

$$\lambda(1-P_N)A - c\mu$$

$$= \frac{\lambda A[1-(\lambda/\mu)^N]}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}} - c\mu$$

Γιά παράδειγμα, αν $N=2$, $\lambda=1$, $A=10$, $c=1$, τότε:

$$\text{κέρδος ανά ώρα} = \frac{10(\mu^3-\mu)}{\mu^3-1} - \mu$$

Βρίσκουμε τώρα εκείνη την τιμή του μ που μεγιστοποιεί την παραπάνω έκφραση.

Παράδειγμα: (Μία ουρά γιά γυάλισμα παπουτσιών)

Έστω ένα κατάστημα το οποίο εξυπηρετεί πελάτες που θέλουν να γυαλίσουν τα παπούτσια τους. Το κατάστημα περιέχει δύο καθίσματα. Στο κάθισμα 1 τα παπούτσια γυαλίζονται ενώ στο κάθισμα 2 τα παπούτσια βουρτσίζονται. Ένας πελάτης, πού μπαίνει στο κατάστημα, πηγαίνει πρώτα στο κάθισμα 1. Αφού τελειώσει το γυάλισμα, πηγαίνει στο κάθισμα 2 εφόσον είναι ελεύθερο ή, διαφορετικά, περιμένει στο κάθισμα 1 μέχρι ν'απελευθερωθεί το κάθισμα 2. Υποθέτουμε ότι ένας ενδεχόμενος πελάτης μπαίνει στο κατάστημα μόνον εφόσον το κάθισμα 1 είναι ελεύθερο.

Αν υποθέσουμε ότι οι ενδεχόμενοι πελάτες φθάνουν στο κατάστημα σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης στα δύο καθίσματα είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσες τιμή $1/\mu_1$ και $1/\mu_2$, αντίστοιχα, τότε

(a) Ποιό ποσοστό των ενδεχόμενων πελατών μπαίνει στο σύστημα;

(b) Ποιός είναι ο **μέσος** αριθμός των πελατών στο σύστημα;

(c) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος κατά τον οποίο ένας πελάτης (που μπαίνει στο σύστημα) βρίσκεται στο σύστημα;

Απάντηση: Ο χώρος των καταστάσεων του συστήματος είναι:

$$I = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (b,1)\}, \text{ όπου:}$$

(0, 0) είναι η κατάσταση κατά την οποία δεν υπάρχουν πελάτες στο σύστημα

(1, 0) " " " " " " υπάρχει ένας πελάτης στο σύστημα και βρίσκεται στο κάθισμα 1

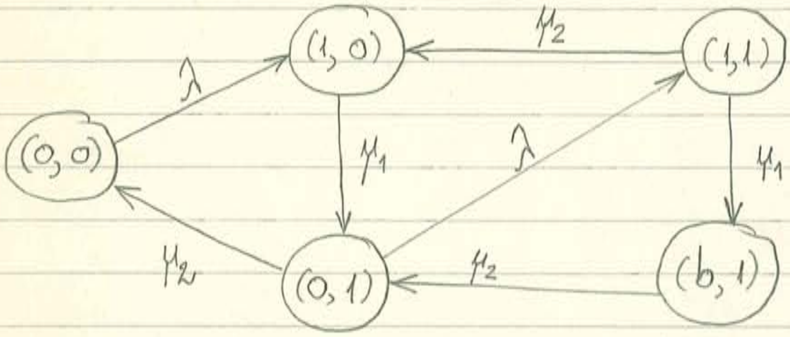
(0, 1) είναι η κατάσταση κατά την οποία υπάρχει ένας πελάτης στο σύστημα και βρίσκεται στο κάθισμα 2.

(1, 1) είναι η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν δύο πελάτες στο σύστημα και αμφότεροι εξυπηρετούνται

(b, 1) είναι η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν δύο πελάτες στο σύστημα, αλλά ο πελάτης που βρίσκεται στο κάθισμα 1 έχει γυαλίσει τα παπούτσια του και περιμένει ν' απελευθερωθεί το κάθισμα 2.

Σημειώνουμε ότι όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (b,1), το άτομο στο κάθισμα 1, αν και δεν εξυπηρετείται, "μπλοκάρει" έναν ενδεχόμενο πελάτη να μπει στο σύστημα.

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι το εξής:



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

Κατάσταση	ρυθμός που η διαδικασία εγκαταλείπει τη κατάσταση = ρυθμός που η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση
(0,0)	$\lambda P_{00} = \mu_2 P_{01}$
(1,0)	$\mu_1 P_{10} = \lambda P_{00} + \mu_2 P_{11}$
(0,1)	$(\lambda+\mu_2) P_{01} = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{b1}$
(1,1)	$(\mu_1+\mu_2) P_{11} = \lambda P_{01}$
(b,1)	$\mu_2 P_{b1} = \mu_1 P_{11}$

Αυτές οι εξισώσεις μαζί με τη συνθήκη

$$P_{00} + P_{10} + P_{01} + P_{11} + P_{b1} = 1$$

δίνουν τις οριακές πιθανότητες $P_{00}, P_{10}, P_{01}, P_{11}, P_{b1}$. Αν και είναι εύκολο να λυθούν αυτές οι εξισώσεις, οι τελικές εκφράσεις είναι πολύπλοκες. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τέθηκαν είναι

(a) $P_{00} + P_{01}$

(b) $L = P_{01} + P_{10} + 2(P_{11} + P_{b1})$

(c) $\lambda_a = \lambda(P_{00} + P_{01})$. Οπότε: $W = \dfrac{P_{01} + P_{10} + 2(P_{11} + P_{b1})}{\lambda(P_{00} + P_{01})}$

Γιά παράδειγμα, αν $\lambda=1$, $\mu_1=1$, $\mu_2=2$ τότε

$$P_{00}=\frac{12}{37},\; P_{10}=\frac{16}{37},\; P_{11}=\frac{2}{37},\; P_{01}=\frac{6}{37},\; P_{b1}=\frac{1}{37}$$

Παράδειγμα: (Μία ουρά με μαζικές εξυπηρετήσεις)

Θεωρούμε ότι ο υπηρέτης μπορεί ταυτόχρονα να εξυπηρετήσει δύο πελάτες. Όταν τελειώσει την εξυπηρέτηση δύο πελατών, αρχίζει να εξυπηρετεί τους δύο επόμενους πελάτες. Αν, όμως, υπάρχει μόνον ένας πελάτης στην ουρά, τότε εξυπηρετεί μόνον αυτόν τον πελάτη.

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$, αν εξυπηρετούνται δύο ή ένας πελάτες. Επίσης υποθέτουμε ότι οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda>0$. Ως παραδείγματα αυτού του συστήματος μπορούν να θεωρηθούν ένα ασανσέρ ή ένα τελεφερίκ, το οποίο μπορεί να μεταφέρει το πολύ δύο επιβάτες ταυτόχρονα.

Σ' αυτό το παράδειγμα συμφέρει να θεωρήσουμε ως χώρο καταστάσεων το σύνολο:

$$\{0', 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

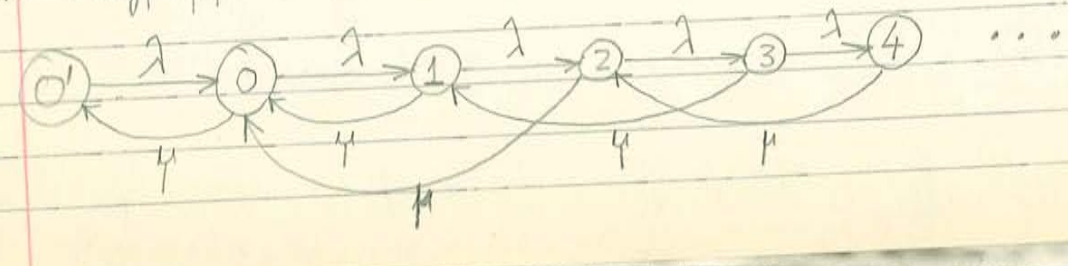
όπου,

Η κατάσταση n, $n>0$ σημαίνει ότι n πελάτες περιμένουν στην ουρά,

Η κατάσταση $0'$ σημαίνει ότι δεν εξυπηρετείται κανένας πελάτης

Η κατάσταση 0 σημαίνει ότι ο υπηρέτης εξυπηρετεί και κανένας πελάτης δεν περιμένει στην ουρά

Το διάγραμμα καταστάσεων είναι το εξής:



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

Κατάσταση	ρυθμός που η διαδικασία εγκαταλείπει την κατάσταση = ρυθμός που η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση
0'	$\lambda P_{0'} = \mu P_0$
0	$(\lambda+\mu)P_0 = \lambda P_{0'} + \mu P_1 + \mu P_2$
$n, n \geq 1$	$(\lambda+\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}$

Οι παραπάνω εξισώσεις μαζί με τη συνθήκη $P_0 + P_{0'} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ δίνουν:

$$P_n = \frac{\alpha^n \lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}, \quad n \geq 0$$

$$P_{0'} = \frac{\mu(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}$$

όπου $\alpha = \dfrac{\sqrt{1+\frac{4\lambda}{\mu}} - 1}{2}$

εφόσον $\alpha < 1 \iff \frac{\lambda}{\mu} < 2$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες, όπως

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\lambda\alpha}{(1-\alpha)[\lambda + \mu(1-\alpha)]}$$

και $W_Q = \dfrac{L_Q}{\lambda}$

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W$$

Άσκηση: Οι μηχανές σ' ένα εργοστάσιο χαλούν σύμφωνα μ' έναν εκθετικό ρυθμό, ο οποίος είναι ίσος με 6 ανά ώρα. Υπάρχει ένας επισκευαστής ο οποίος επισκευάζει τις μηχανές μ' έναν εκθετικό ρυθμό, ο οποίος είναι ίσος με 8 ανά ώρα. Το κόστος εξαιτίας της χαμένης παραγωγής όταν οι μηχανές δεν δουλεύουν είναι ίσο με \$10 ανά ώρα γιά κάθε μηχανή. Ποιός είναι ο μέσος ρυθμός κόστους λόγω των χαλασμένων μηχανών;

Απάντηση: Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μία ουρά M/M/1 στην οποία $\lambda=6$, $\mu=8$.
Ο μέσος ρυθμός κόστους ισούται με

\$10 ανα ώρα γιά κάθε μηχανή × μέσος αριθμός των χαλασμένων μηχανών

Ο μέσος αριθμός των χαλασμένων μηχανών ισούται με την ποσότητα L, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα ο μέσος ρυθμός κόστους είναι ίσος με \$30 ανά ώρα.

Άσκηση: Έστω μία ουρά M/M/1 με ρυθμούς άφιξης πελατών και εξυπηρέτησης λ και μ, αντίστοιχα. Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός των αφίξεων κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης ενός πελάτη;

Απάντηση: Έστω:
X = # των αφίξεων κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης ενός πελάτη
Y = χρόνος της εξυπηρέτησης ενός πελάτη.
Χρησιμοποιώντας τον τύπο (Θεώρημα ολικής πιθανότητας για

τη μέση τιμή) της σελ. 18 έχουμε:

$$EX = \int_0^\infty E(X|Y=t) f_Y(t)\, dt$$

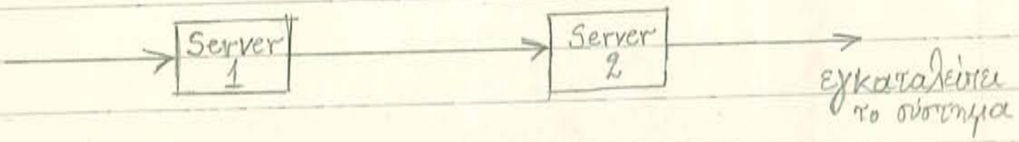
$$= \int_0^\infty E(X|Y=t) \mu e^{-\mu t} dt = \int_0^\infty \lambda t \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= -\int_0^\infty \lambda t \left(e^{-\mu t}\right)' dt = -\lambda t e^{-\mu t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \lambda e^{-\mu t} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \int_0^\infty \mu e^{-\mu t}\, dt = \frac{\lambda}{\mu}$$

Δίκτυα Ουρών (Ανοικτά Συστήματα)

Θεωρούμε ένα σύστημα με δύο υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη 1 σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Αφού εξυπηρετηθεί από τον υπηρέτη 1 πηγαίνει στην ουρά μπροστά από τον υπηρέτη 2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει άπειρος χώρος αναμονής και στους δύο υπηρέτες. Ο κάθε υπηρέτης εξυπηρετεί έναν πελάτη κάθε φορά. Ο χρόνος εξυπηρετήσεως που χρειάζεται ο υπηρέτης i, $i=1,2$, είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $1/\mu_i$.



Έστω (n,m) η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν n πελάτες στον υπηρέτη 1 και m πελάτες στον υπηρέτη 2. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής:

Κατάσταση	Ρυθμός που η διαδικασία εγκαταλείπει την κατάσταση = Ρυθμός που η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση
$(0,0)$	$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1}$
$(n,0),\ n>0$	$(\lambda+\mu_1)P_{n,0} = \mu_2 P_{n,1} + \lambda P_{n-1,0}$
$(0,m),\ m>0$	$(\lambda+\mu_2)P_{0,m} = \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1}$
$(n,m),\ n\cdot m>0$	$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,m} = \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} + \lambda P_{n-1,m}$

Οι αριθμοί

$$P_{n,m} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right), \quad n,m \geq 0$$

επαληθεύουν τις παραπάνω εξισώσεις μαζί με την εξίσωση $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} P_{n,m}=1$.

Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \sum_{n,m}(n+m)P_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \frac{\lambda}{\mu_1-\lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2-\lambda}$$ και

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu_1-\lambda} + \frac{1}{\mu_2-\lambda}$$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν ως εξής:

Θεωρούμε ένα σύστημα με k υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη i, $i=1,\dots,k$ σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό r_i, $i=1,\dots,k$. Θεωρούμε ότι αυτές οι k ανελίξεις Poisson είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μόλις ένας πελάτης εξυπηρετηθεί από τον υπηρέτη i πηγαίνει στην ουρά που έχει σχηματιστεί μπροστά από τον υπηρέτη j, $j=1,\dots,k$ με πιθανότητα P_{ij}.
Επομένως η ποσότητα $1-\sum_{j=1}^{k} P_{ij} \geq 0$ παριστάνει την πιθανότητα να αποχωρήσει από το σύστημα ένας πελάτης που μόλις εξυπηρετήθηκε από τον υπηρέτη i.

Έστω λ_j ο συνολικός ρυθμός άφιξης των πελατών στον υπηρέτη j. Οι ποσότητες λ_j, $j=1,\dots,k$ μπορούν να υπολογιστούν από το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{ij} \qquad j=1,\dots,k$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εξηγηθούν ως εξής: r_j είναι ο ρυθμός άφιξης προς τον υπηρέτη j των πελατών που βρίσκονται εκτός συστήματος και $\lambda_i P_{ij}$ είναι ο ρυθμός άφιξης προς τον υπηρέτη j των πελατών που μόλις εξυπηρετήθηκαν από τον υπηρέτη i.

Έστω ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη από τον υπηρέτη j ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ_j^{-1}.

Έστω $(n_1,\dots,n_k)$ η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν n_i, $i=1,\dots,k$ πελάτες στην i ουρά. Αν $\lambda_j/\mu_j < 1$ γιά κάθε $j=1,\dots,k$ τότε υπάρχει οριακή κατανομή του συστήματος. Οι οριακές πιθανότητες δίνονται από τον τύπο:

$$P(n_1,\dots,n_k) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{n_j}\left(1-\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα δίνεται από τον τύπο

$$L = \sum_{j=1}^{k} (\text{μέσος αριθμός πελατών στον υπηρέτη } j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής W ενός πελάτη στο σύστημα βρίσκεται από τον τύπο του Little: $L = \lambda W$ με $\lambda = \sum_{j=1}^{k} r_j$. Οπότε

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j/(\mu_j - \lambda_j)}{\sum_{j=1}^{k} r_j}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα δίκτυο ουρών με δύο υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη 1 σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό 4 και στον υπηρέτη 2 σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 5. Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης των υπηρετών 1 και 2 είναι ίσοι με 8 και 10, αντίστοιχα. Ένας πελάτης μετά την συμπλήρωση της εξυπηρέτησής του από τον υπηρέτη 1 εγκαταλείπει το σύστημα ή πηγαίνει στον υπηρέτη 2 με ίσες πιθανότητες (δηλαδή, $P_{11} = 0$, $P_{12} = \frac{1}{2}$). Ένας πελάτης μετά την εξυπηρέτησή του από τον υπηρέτη 2 πηγαίνει στον υπηρέτη 1 με πιθανότητα 1/4 ή εγκαταλείπει το σύστημα (δηλαδή, $P_{21} = \frac{1}{4}$, $P_{22} = 0$). Βρείτε τις οριακές πιθανότητες και τις ποσότητες L και W.

Απάντηση: Εδώ οι συνολικοί ρυθμοί άφιξης λ_1 και λ_2 προς τους υπηρέτες 1 και 2 υπολογίζονται από το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 + \frac{1}{4}\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 5 + \frac{1}{2}\lambda_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 8$$

Άρα οι οριακές πιθανότητες $P(n,m)$ δίδονται από τον τύπο

$$P(n,m) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^m \frac{1}{5} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^m$$

Επίσης : $L = \frac{6}{8-6} + \frac{8}{10-8} = 7$ και $W = \frac{L}{9} = \frac{7}{9}$

ΔΙΚΤΥΑ ΟΥΡΩΝ (ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ)

Έστω τώρα ότι έχουμε m πελάτες που κινούνται σ' ένα σύστημα με m υπηρέτες. Μόλις ένας πελάτες εξυπηρετηθεί από τον i υπηρέτη πηγαίνει στον j υπηρέτη $(j=1,\dots,k)$ με πιθανότητα P_{ij}. Υποθέτουμε ότι $\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1$ για όλα τα $i=1,\dots,k$.

Έστω $(n_1,\dots,n_k)$ η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν n_j, $j=1,\dots,k$, πελάτες στον j υπηρέτη.

Αποδεικνύεται (επαληθεύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας) ότι οι οριακές πιθανότητες $P_m(n_1,n_2,\dots,n_k)$ δίνονται από τον τύπο :

$$P_m(n_1,\dots,n_k) = \begin{cases} C_m \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{\pi_j}{\mu_j}\right)^{n_j} & \text{αν } \sum_{j=1}^{k} n_j = m \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου

$$C_m = \left[\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k: \\ \sum_j n_j = m}} \prod_{j=1}^{k} (\pi_j/\mu_j)^{n_j}\right]^{-1}$$

και $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ είναι η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$$

Ουρά M/M/k με πεπερασμένη χωρητικότητα

Θεωρούμε μία ουρά με k υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ και μπαίνουν στο σύστημα εφόσον ένας τουλάχιστον από τους k υπηρέτες είναι ελεύθερος. Αν όλοι οι k υπηρέτες είναι απασχολημένοι τότε οι πελάτες δεν μπαίνουν στο σύστημα, αλλά αποχωρούν. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ^{-1}. Οι εξισώσεις ισορροπίας γι' αυτή την διαδικασία είναι οι εξής:

Κατάσταση	Ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εγκαταλείπει την κατάσταση = Ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση
0	$\lambda P_0 = \mu P_1$
1	$(\lambda+\mu) P_1 = 2\mu P_2 + \lambda P_0$
2	$(\lambda+2\mu) P_2 = 3\mu P_3 + \lambda P_1$
$i,\ 0<i<k$	$(\lambda+i\mu) P_i = (i+1)\mu P_{i+1} + \lambda P_{i-1}$
k	$k\mu P_k = \lambda P_{k-1}$

Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$\lambda P_1 = 2\mu P_2$$
$$\lambda P_2 = 3\mu P_3$$
$$\vdots$$
$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$$

ή, ισοδύναμα,

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \,,$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} P_0 \,,$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{(\lambda/\mu)^3}{3!} P_0 \,,$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} P_0$$

και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $\sum_{i=0}^{k} P_i = 1$ παίρνουμε

$$P_i = \frac{(\lambda/\mu)^i / i!}{\sum_{j=0}^{k} (\lambda/\mu)^j / j!}, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $E(S) = \frac{1}{\mu}$, όπου $E(S)$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, ο προηγούμενος τύπος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$P_i = \frac{(\lambda E(S))^i / i}{\sum_{j=0}^{k} (\lambda E(S))^j / j!}, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

Παρατήρηση: Ας θεωρήσουμε το ίδιο μοντέλο με την διαφορά ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη ακολουθεί μία οποιαδήποτε κατανομή και όχι απαραίτητα την εκθετική κατανομή. Αυτό το μοντέλο συμβολίζεται με $M/G/k$ και μερικές φορές ονομάζεται σύστημα απώλειας του Erlang (Erlang loss system). Αποδεικνύεται (αν και δύσκολα) ότι ο παραπάνω τύπος (ο οποίος ονομάζεται τύπος απώλειας του Erlang) ισχύει και γι' αυτό το γενικότερο μοντέλο.

Ουρά M/M/k με άπειρη χωρητικότητα

Θεωρούμε τώρα ότι η ουρά έχει άπειρη χωρητικότητα. Ο χώρος καταστάσεων αποτελείται τώρα από όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους. Μπορεί να επαληθευτεί (Άσκηση) ότι οι οριακές πιθανότητες δίνονται από τον τύπο:

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{\frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \cdot \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}}, & i \leq k \\[2ex] \dfrac{(\lambda/k\mu)^i k^k}{k!} P_0, & i > k \end{cases}$$

Βλέπουμε από τον παραπάνω τύπο ότι πρέπει να επιβάλουμε τον περιορισμό $\lambda < k\mu$.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι η ποσότητα W είναι μικρότερη σ' ένα μοντέλο $M/M/1$, στο οποίο οι ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης είναι ίσοι με λ και 2μ, αντίστοιχα, από ένα μοντέλο $M/M/2$ (με άπειρη χωρητικότητα) στο οποίο οι ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης είναι ίσοι με λ και μ, αντίστοιχα. Δώστε μία διαισθητική εξήγηση αυτού του αποτελέσματος. Ισχύει αυτό το αποτέλεσμα γιά την ποσότητα W_Q;

<u>Απάντηση</u>: Γιά τον υπολογισμό της ποσότητας W γιά την ουρά $M/M/2$ βρίσκουμε τις οριακές πιθανότητες P_n, $n=0,1,\ldots$. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda+\mu) P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$$
$$(\lambda+2\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + 2\mu P_{n+1}, \quad n \geq 2$$

Προκύπτει ότι $P_n = \rho^n / 2^{n-1} P_0$, όπου $\rho = \lambda/\mu$. Η συνθήκη $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ συνεπάγεται ότι

$$P_0 = \frac{1-\rho/2}{1+\rho/2} = \frac{2-\rho}{2+\rho}$$

Αφού έχουμε υπολογίσει τις πιθανότητες P_n μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα L και την ποσότητα W μέσω του τύπου $L = \lambda W$:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \rho P_0 \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1} = 2 P_0 \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{2}\right)^n$$

$$= 2\,\frac{2-\rho}{2+\rho}\,\frac{\rho/2}{(1-\rho/2)^2} = \frac{4\rho}{(2+\rho)(2-\rho)} = \frac{4\mu\lambda}{(2\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Little $L = \lambda W$ έχουμε

$$W = W(M/M/2) = \frac{4\mu}{(2\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)}$$

Γιά την ουρά $M/M/1$ με ρυθμό εξυπηρέτησης 2μ έχουμε ότι

$$W = W(M/M/1) = \frac{1}{2\mu-\lambda}$$

Έχουμε υποθέσει ότι $2\mu > \lambda$ έτσι ώστε να υπάρχει οριακή κατανομή γιά την ουρά $M/M/1$ με ρυθμούς άφιξης και εξυπηρέτησης λ και 2μ αντίστοιχα. Οπότε

$$4\mu > 2\mu + \lambda \Rightarrow \frac{4\mu}{2\mu+\lambda} > 1 \Rightarrow W(M/M/2) > W(M/M/1).$$

Η διαισθητική εξήγηση του παραπάνω αποτελέσματος έγκειται στο ότι αν κάποιος πελάτης βρεί κενή την ουρά $M/M/2$, η ύπαρξη δύο υπηρετών δεν προσφέρει κανένα πλεονέκτημα. Θα ήταν καλύτερα να υπήρχε ένας αλλά ταχύτερος υπηρέτης.

Έστω τώρα $W_Q^1 = W_Q(M/M/1)$

και

$W_Q^2 = W_Q(M/M/2)$

Τότε:

$$W_Q^1 = W(M/M/1) - 1/(2\mu) = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)}$$

$$W_Q^2 = W(M/M/2) - 1/\mu = \frac{\lambda^2}{\mu(2\mu-\lambda)(2\mu+\lambda)}$$

Οπότε: $W_Q^1 > W_Q^2 \iff \frac{1}{2} > \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \iff \lambda < 2\mu.$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της σταθερότητας της ουράς $M/M/2$.

Η ουρά M/G/1

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο
(i) οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$.
(ii) ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί μία (γενική) κατανομή.
(iii) υπάρχει ένας υπηρέτης.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει ο εξής τύπος:

$$W_Q = \frac{\lambda \cdot E(S^2)}{2 \cdot (1 - \lambda E(S))}, \quad \text{(τύπος των Pollaczek-Khintchine)}$$

όπου S είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη

Ο παραπάνω τύπος ισχύει όταν $\lambda E(S) < 1$.
Οι ποσότητες L, L_Q και W βρίσκονται εύκολα από τον τύπο του Little ως εξής:

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1 - \lambda E(S))}$$

$$W = W_Q + E(S) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1 - \lambda E(S))} + E(S)$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2 \cdot (1 - \lambda E(S))} + \lambda E(S)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αφού $E(S^2) = \Delta(S) + (E(S))^2$ από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι, γιά σταθερό $E(S)$, οι ποσότητες L, L_Q, W, W_Q αυξάνουν καθώς αυξάνει η διασπορά του χρόνου εξυπηρέτησης.

Καθώς προχωράει ο χρόνος το σύστημα εναλλάσσεται ανάμεσα σε χρονικές περιόδους στις οποίες δεν υπάρχει κανένας πελάτης στο σύ-

σύστημα και σε περιόδους στις οποίες υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στο σύστημα. Έστω

I_n = το μήκος της n-οστής περιόδου κατά την οποία δεν υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα. $(n=1,2,\dots)$

B_n = το μήκος της n-οστής περιόδου κατά την οποία υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στο σύστημα $(n=1,2,\dots)$

Τότε κατά τη διάρκεια $\sum_{j=1}^{n}(I_j + B_j)$ χρονικών μονάδων ο υπηρέτης είναι ανενεργός γιά μία χρονική περίοδο $\sum_{j=1}^{n} I_j$ χρονικών μονάδων. Γνωρίζουμε όμως ότι το ποσοστό του χρόνου κατά τον οποίο ο υπηρέτης είναι ανενεργός ισούται με την οριακή πιθανότητα P_0. Άρα

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_1+\cdots+I_n}{I_1+\cdots+I_n+B_1+\cdots+B_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{I_1+\cdots+I_n}{n}}{\frac{I_1+\cdots+I_n}{n} + \frac{B_1+\cdots+B_n}{n}}$$

$$\overset{\text{ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών}}{=} \frac{E(I)}{E(I)+E(B)}, \qquad (*)$$

όπου: I : περίοδος κατά την οποία ο υπηρέτης είναι ανενεργός
B : περίοδος κατά την οποία ο υπηρέτης είναι ενεργός

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα I παριστάνει το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ένας πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα και το αφήνει κενό μέχρι την επόμενη άφιξη ενός πελάτη. Δεδομένου ότι οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson(λ) συμπεραίνουμε ότι

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \qquad (**)$$

Για να υπολογίσουμε την ποσότητα P_0 θα χρησιμοποιήσουμε την εξής σχέση, (την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη):

$$\text{μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών} = \lambda \cdot E(S')$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης ισούται με

$$0 \cdot P_0 + 1 \cdot (1 - P_0) = 1 - P_0$$

άρα

$$1 - P_0 = \lambda E(S') \Rightarrow P_0 = 1 - \lambda E(S') \quad (***)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (*), (**), (***) έχουμε ότι:

$$E(B) = \frac{E(S')}{1 - \lambda E(S')}$$

Ουρά M/G/1 με μαζικές αφίξεις τυχαίου μεγέθους

Όπως προηγουμένως θεωρούμε ότι οι αφίξεις πραγματοποιούνται σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Όμως τώρα υποθέτουμε ότι κάθε άφιξη δεν αποτελείται από έναν μοναδικό πελάτη αλλά από έναν τυχαίο αριθμό πελατών. Όπως προηγουμένως υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη ακολουθεί μία γενική κατανομή.

Έστω N η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το μέγεθος μιάς άφιξης. Το σύνολο τιμών της N είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Εδώ $\lambda_a = \lambda \cdot E(N)$.

Αποδεικνύεται ότι:

$$W_Q = \frac{E(S)\left(E(N^2) - E(N)\right)/2E(N) + \lambda E(N) E(S^2)/2}{1 - \lambda E(N) E(S)}$$

υπό την προϋπόθεση ότι:

$$\lambda E(N) < \frac{1}{E(S)}$$

Οι ποσότητες L, L_Q και W βρίσκονται ως εξής:

$$W = W_Q + E(S)$$

$$L = \lambda_a W = \lambda E(N) W$$

$$L_Q = \lambda E(N) W_Q$$

Ένα μοντέλο γιά έλεγχο αποθεμάτων

Θεωρούμε το εξής μοντέλο για έλεγχο αποθεμάτων:

Κάποιο προϊόν παράγεται ή αγοράζεται για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Το κόστος παραγωγής z τεμαχίων ισούται με

$$G(z) = \begin{cases} K + cz & \text{αν } z>0, \\ 0 & \text{αν } z=0, \end{cases}$$

όπου $K>0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα κόστος ίσο με c Ευρώ ανά τεμάχιο και ένα πάγιο κόστος ίσο με K οποτεδήποτε πραγματοποιείται μία παραγωγή (ή αγορά).

Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα κόστος αποθήκευσης ίσο με h Ευρώ για κάθε τεμάχιο που παραμένει μέχρι το τέλος της περιόδου. Ακόμα υπάρχει ένα κόστος ίσο με p Ευρώ για κάθε τεμάχιο που ζητείται αλλά λόγω έλλειψης δεν διατίθεται. Το πρόβλημα είναι το εξής:

Αν στην αρχή της περιόδου υπάρχουν x τεμάχια, αν η ζήτηση του προϊόντος κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι μία τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(\xi)$ και αν η υλοποίηση κάθε παραγγελίας πραγματοποιείται άμεσα, πόσα πρόσθετα τεμάχια πρέπει να παραγγελθούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος;

Έστω:

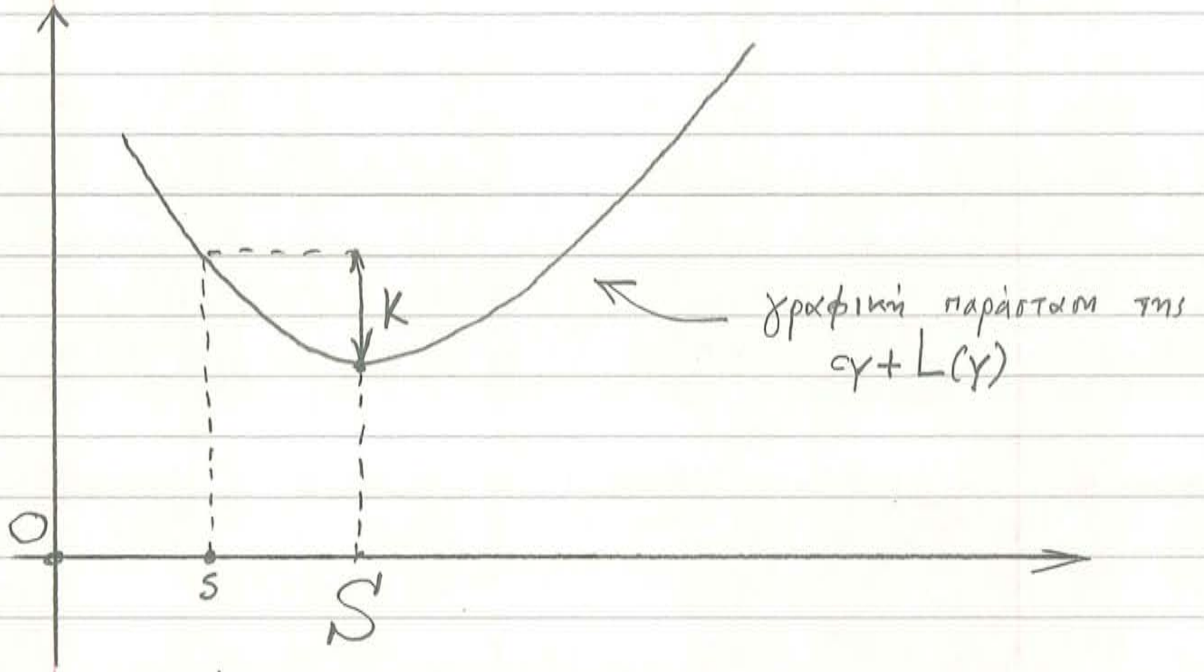
$$L(y) = p\int_{y}^{\infty}(\xi-y)f(\xi)\,d\xi + h\int_{0}^{y}(y-\xi)f(\xi)\,d\xi \qquad (*)$$

Η ποσότητα $L(y)$ παριστάνει το αναμενόμενο κόστος λόγω αποθήκευσης και λόγω έλλειψης του προϊόντος αν παραγγείλουμε τόσα προϊόντα έτσι ώστε το σύνολο των προϊόντων να είναι y, δηλαδή αν παραγγείλουμε $y-x$ προϊόντα. Άρα το αναμενόμενο συνολικό κόστος αν παραγγείλουμε $y-x$ προϊόντα είναι ίσο με

$$K + c(y-x) + L(y), \text{ αν } y > x$$

$$L(x), \text{ αν } y = x$$

Αποδεικνύεται από την (*) ότι η συνάρτηση $L(y)$ είναι κυρτή.



Ορίζουμε ως S την τιμή του y που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $cy + L(y)$. Ορίζουμε επίσης ως s την μικρότερη τιμή του y για την οποία

$$cs + L(s) = K + cS + L(S)$$ "βλέπε παραπάνω γραφική παράσταση"

Από την παραπάνω γραφική παράσταση (ή ακριβέστερα από την κυρτότητα της $cy + L(y)$) είναι φανερό ότι:

αν $x > s$ τότε $cy + L(y) > cx + L(x)$ για όλα τα $y > x$, και συνεπώς

$$K + c\cdot(y-x) + L(y) > L(x) \text{ αν } y > x.$$ Άρα

η βέλτιστη πολιτική δεν πραγματοποιεί καμμία παραγγελία αν $x > S$.
Αν $s \leqslant x \leqslant S$, τότε είναι φανερό από την παραπάνω γραφική παράσταση ότι:

$$K + cy + L(y) \geqslant cx + L(x) \quad \text{γιά όλα τα } y > x$$

και έτσι

$$K + c(y-x) + L(y) \geqslant L(x) \quad \text{για όλα τα } y > x.$$

Συνεπώς πάλι η βέλτιστη πολιτική δεν πραγματοποιεί καμμία παραγγελία

Αν $x < s$ από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι

$$\min_{y \geqslant x} \left[K + cy + L(y)\right] = K + cS + L(S) < cx + L(x)$$

ή

$$\min_{y \geqslant x} \left[K + c(y-x) + L(y)\right] = K + c(S-x) + L(S) < L(x).$$

Συνεπώς η βέλτιστη πολιτική παραγγέλνει τόσα προϊόντα έτσι ώστε το σύνολό τους να είναι ίσο με S.

<u>Συμπέρασμα</u>: Η βέλτιστη πολιτική:

- παραγγέλνει $S - x$ τεμάχια αν $x < s$.
- δεν παραγγέλνει κανένα τεμάχιο αν $x \geqslant s$

Η τιμή του S (και συνεπώς και του s) βρίσκεται ελαχιστοποιώντας την συνάρτηση $G(y) = cy + L(y)$.

Παραγωγίζοντας την $G(y)$ βρίσκουμε ότι αυτή η τιμή του S ικανοποιεί την σχέση:

$$F(S) = \frac{p-c}{p+h},$$

όπου F είναι η συνάρτηση κατανομής της ζήτησης

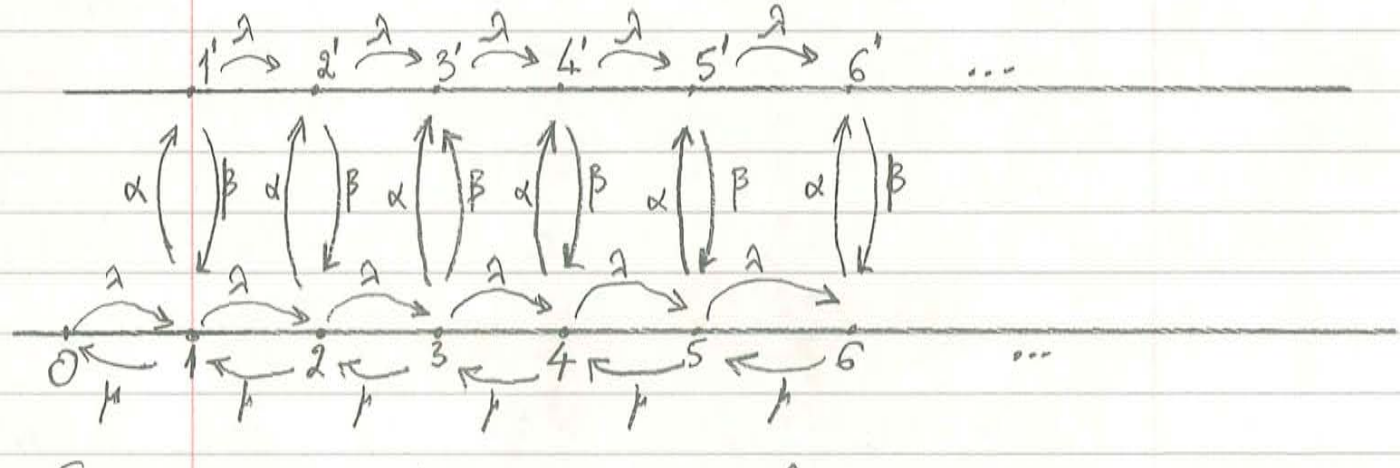
Παρατήρηση: Αν δεν υπάρχει πάγιο κόστος, δηλαδή αν $K=0$, τότε $S=s$. Οπότε η βέλτιστη πολιτική

- παραγγέλνει $s-x$ τεμάχια αν $x<s$
- δεν παραγγέλνει κανένα τεμάχιο αν $x \geq s$.

Πρόβλημα: Θεωρούμε μία ουρά $M/M/1$ με ρυθμό άφιξης πελατών λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Υποθέτουμε ότι ο υπηρέτης μπορεί να πάθει κάποια βλάβη σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μήκους $h \to 0$ με πιθανότητα $\alpha h + o(h)$. Αυτή η βλάβη απενεργοποιεί τον υπηρέτη. Ο χρόνος επισκευής του υπηρέτη είναι εκθετικά κατανεμημένος με ρυθμό β. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα κατά τη στιγμή της βλάβης παραμένουν στο σύστημα και ότι οι αφίξεις των πελατών πραγματοποιούνται και κατά την διάρκεια της επισκευής.

Ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα;

Απάντηση: Το διάγραμμα καταστάσεων είναι το εξής:



Εδώ ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο:
$$\{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{1', 2', 3', \dots\}$$

n: κατάσταση του συστήματος όταν υπάρχουν n πελάτες και ο υπηρέτης λειτουργεί

n': " " " " " " " " " επισκευάζεται

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

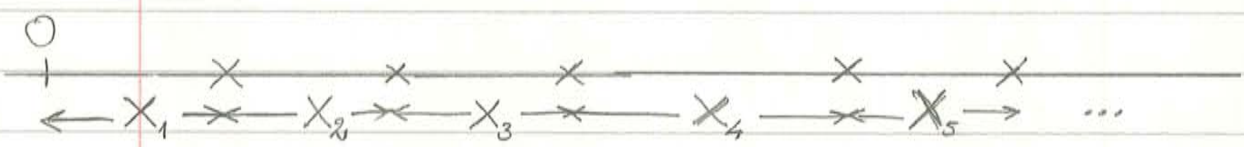
$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda+\mu+\alpha) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} + \beta P_{n'} \quad , n \geq 1$$
$$(\beta+\lambda) P_{1'} = \alpha P_1$$
$$(\beta+\lambda) P_{n'} = \alpha P_n + \lambda P_{(n-1)'} \quad , n \geq 2$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n'} = 1$$

Οι ποσότητες L και W μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των οριακών πιθανοτήτων ως εξής:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n(P_n + P_{n'}) \quad \text{και} \quad W = \frac{L}{\lambda}$$

Ανανεωτικές ανελίξεις με κόστος

Θεωρούμε μία ακολουθία γεγονότων τέτοια ώστε οι ενδιάμεσοι χρόνοι X_i, $i=1,2,\ldots$ να είναι <u>ισόνομοι</u> και <u>ανεξάρτητοι</u> (βλέπε παρακάτω σχήμα).



Έστω $E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X)$

Έστω C_i το κόστος που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα X_i, $i=1,2,\ldots$

Θεωρούμε ότι C_i, $i=1,2,\ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Έστω $\mathbb{E}(C_1)=\mathbb{E}(C_2)=\ldots=\mathbb{E}(C)$

Έστω $C(t)$: συνολικό κόστος μέχρι την χρονική στιγμή t.

<u>Πρόταση</u> (σημαντική) : Ισχύει ότι

με πιθανότητα 1, $$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{t}=\frac{E(C)}{E(X)}$$

"αναμενόμενο κόστος ενός κύκλου"

"αναμενόμενος χρόνος ενός κύκλου"

"αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου".

<u>Εφαρμογή</u>: ('Ενα μοντέλο γιά την αγορά ενός αυτοκινήτου)

Ο χρόνος ζωής ενός αυτοκινήτου είναι μία συνεχής τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $H(\cdot)$ και πυκνότητα $h(\cdot)$. Ο κος Γιάννης ακολουθεί την εξής πολιτική ως προς την αγορά του αυτοκινήτου του: Αγοράζει ένα καινούργιο αυτοκίνητο μόλις το προηγούμενο αυτοκίνητο χαλάσει ή μόλις η ηλικία του ξεπεράσει τα T χρόνια.

Υποθέτουμε ότι ένα καινούργιο αυτοκίνητο κοστίζει C_1 δολλάρια και επίσης υπάρχει ένα επιπρόσθετο κόστος ίσο με C_2 δολλάρια στην περίπτωση που χαλάσει το αυτοκίνητο.

Αν υποθέσουμε ότι ένα μεταχαρισμένο αυτοκίνητο δεν έχει καμμία αξία μεταπώλησης, ποιό είναι το αναμενόμενο μέσο κόστος;

Απάντηση: Υποθέτοντας ότι ένας κύκλος συμπληρώνεται οποτεδήποτε ο κος Γιάννης αγοράζει καινούργιο αυτοκίνητο συμπεραίνουμε από την προηγούμενη πρόταση ότι το αναμενόμενο μέσο κόστος ισούται με την εξής ποσότητα:

$$\frac{\mathbb{E}(\text{κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου})}{\mathbb{E}(\text{χρόνος ενός κύκλου})}$$

Αν συμβολίσουμε με X τον χρόνο ζωής του αυτοκινήτου του κου Γιάννη κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, τότε το κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου δίνεται από:

$$\begin{array}{ll} C_1, & \text{αν } X > T \\ C_1 + C_2, & \text{αν } X \leq T \end{array}$$

Οπότε το αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου δίδεται από:

$$C_1 P\{X > T\} + (C_1 + C_2) \cdot P\{X \leq T\} = C_1 + C_2 H(T)$$

Επίσης το χρονικό μήκος ενός κύκλου δίνεται από:

$$\begin{array}{ll} X, & \text{αν } X \leq T \\ T, & \text{αν } X > T \end{array}$$

Οπότε το αναμενόμενο μήκος ενός κύκλου είναι:

$$\int_0^T x h(x) dx + \int_T^\infty T h(x) dx = \int_0^T x h(x) dx + T[1 - H(T)]$$

Άρα το αναμενόμενο μέσο κόστος είναι ίσο με

$$\frac{C_1 + C_2 H(T)}{\int_0^T x h(x) dx + T[1 - H(T)]} \qquad (*)$$

2ο ερώτημα: Αν ο χρόνος ζωής (σε χρόνια) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα $(0, 10)$, $C_1 = 3$ χιλ. δολλάρια, $C_2 = 0.5$ χιλ. δολλάρια, ποιά τιμή του T ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος του κου Γιάννη;

Απάντηση: Αν ο κος Γιάννης χρησιμοποιήσει την τιμή T, $T \leq 10$, τότε από τη σχέση (*) έχουμε ότι το αναμενόμενο μέσο κόστος ισούται με

$$g(T) = \frac{3 + \frac{1}{2}\frac{T}{10}}{\int_0^T \frac{x}{10}dx + T\left(1 - \frac{T}{10}\right)} = \frac{60 + T}{20T - T^2}, \quad T \leq 10$$

Για να βρεθεί το ελάχιστο της $g(T)$ έχουμε:

$$g'(T) = \frac{(20T - T^2) - (60+T)(20 - 2 \cdot T)}{(20 \cdot T - T^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow T^2 + 120T - 1200 = 0 \Longrightarrow T \in \{9.25, -129.25\}$$

Αφού $T \leq 10$ συμπεραίνουμε ότι ο κος Γιάννης θα αγοράζει καινούργιο αυτοκίνητο οποτεδήποτε το παλιό αυτοκίνητό του φθάσει τα 9.25 χρόνια.