

Λύσεις Ασκήσεων (Κίνηση Brown, Martingales)

1. $B(s) + B(t) = 2B(s) + B(t) - B(s)$

Η τ.φ. $2B(s)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση $4s$

Η τ.φ. $B(t) - B(s)$ είναι ισόνομη με $B(t-s)$ που είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση $t-s$.

Ποσω ανεξαρτήτων προσαυξήσεων οι τ.φ. $2B(s)$ και $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς η τ.φ. $B(s) + B(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση $4s + t - s = 3s + t$

2. Υπολογίστε την δεσμευμένη κατανομή της $B(s)$ δαθέντος ότι $B(t_1) = A$, $B(t_2) = B$, όπου $0 < t_1 < s < t_2$

Απάντηση: Η δεσμευμένη κατανομή της $B(s) - A$ δαθέντος ότι $B(t_1) = A$ και $B(t_2) = B$ είναι ίδια με τη δεσμευμένη κατανομή της $B(s-t_1)$ δαθέντος ότι $B(0) = 0$ και $B(t_2-t_1) = B-A$, η οποία βάσει των σχέσεων (4) στη σελ. 67, είναι κανονική με μέση τιμή $\frac{s-t_1}{t_2-t_1}(B-A)$ και διακύμανση $\frac{s-t_1}{t_2-t_1}(t_2-s)$.

Συνεπώς η ζητούμενη δεσμευμένη κατανομή είναι κανονική με μέση τιμή

$$A + \frac{(s-t_1)(B-A)}{t_2-t_1} \quad \text{και} \quad \text{διακύμανση} \quad \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}$$

3. $P(T_a < \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(T_a \leq t)$

βλ. π. 7) σελ. 69

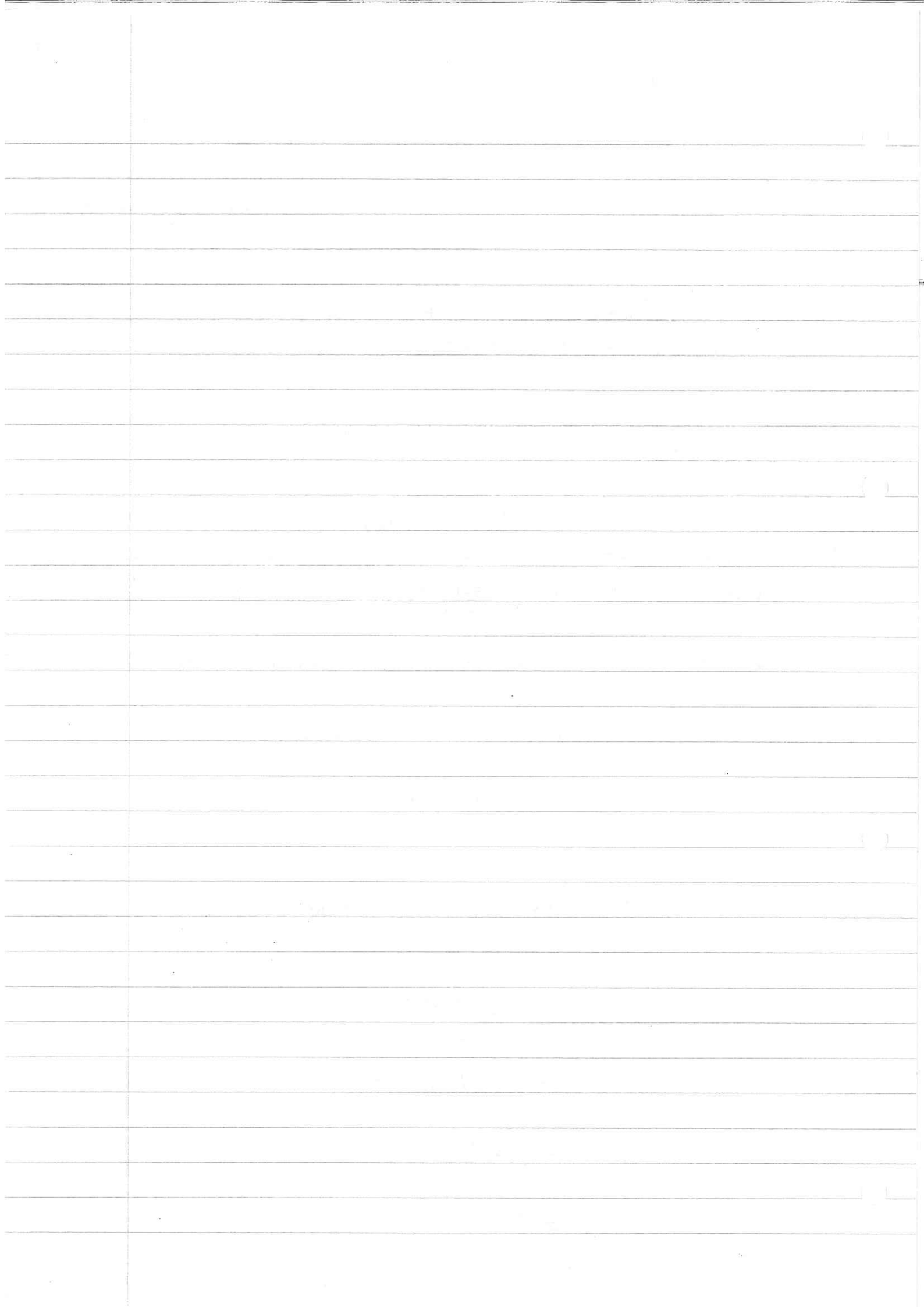
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= 2 P[N(0,1) > 0]$$

$$= 2 * \frac{1}{2}$$

$$= 1$$



4. $P(T_1 < T_{-1} < T_2) = P(\text{φθάνει στο } 1 \text{ πριν από το } -1 \text{ πριν από το } 2)$

$$= P(\text{φθάνει στο } 1 \text{ πριν από το } -1) P(\text{φθάνει στο } -1 \text{ πριν από το } 2 \mid \text{φθάνει στο } 1 \text{ πριν το } -1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

5. Η πιθανότητα ανάκτησης της τμήσης αγοράς της μετοχής ισούται με την πιθανότητα η κίνηση Brown να φθάσει στο c κατά το χρονικό διάστημα t . Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$1 - P\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} B(s) \geq c \right\} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{c/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad (\text{βλ. σελ. 69})$$

6. Οι παράμετροι αυτού του προβλήματος είναι $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 1$, $x_0 = 100$, $t = 10$, $K = 100$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο Black-Scholes (βλ. (12), σελ. 84)

$$b = [0.5 - 0.05 - \log(100/100)] / \sqrt{10} = -4.5 / \sqrt{10} = -1.423$$

και

$$\begin{aligned} C &= 100 \Phi(\sqrt{10} - 1.423) - 100 e^{-0.5} \Phi(-1.423) \\ &= 100 \Phi(1.739) - 100 e^{-0.5} [1 - \Phi(1.423)] \\ &\approx 91.2 \end{aligned}$$

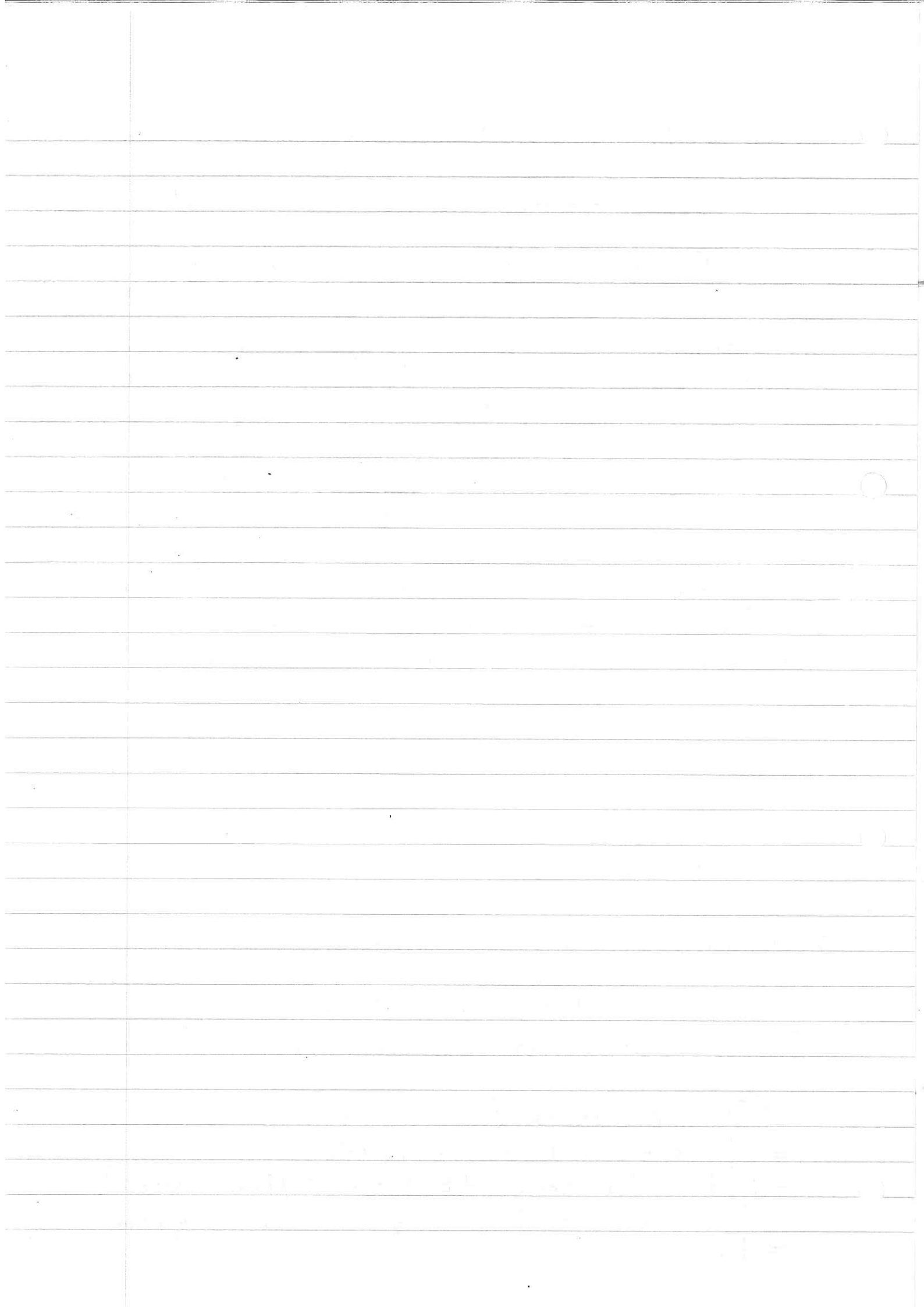
7. Παίρνουμε μέσες τιμές στην εξίσωση που ορίζει την martingale έχουμε ότι:

$$E[Y(s)] = E[E[Y(t) \mid \mathcal{F}_u], \alpha \leq u \leq s] = E[Y(t)]$$

Συνεπώς, η $E[Y(t)]$ είναι σταθερά και, επομένως, ίση με $E[Y(0)]$

8. $E[B(t) \mid \mathcal{F}_u, 0 \leq u \leq s] \quad (s < t)$

$$\begin{aligned} &= E[B(s) + B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_u, 0 \leq u \leq s] \\ &= E[B(s) \mid \mathcal{F}_u, 0 \leq u \leq s] + E[B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_u, 0 \leq u \leq s] \\ &= B(s) + E[B(t) - B(s)] \quad (\text{λόγω ανεξαρτησίας προσδύσεων}) \\ &= B(s) \end{aligned}$$



9. Από το Θεώρημα Τερματισμού της Martingale έχουμε

$$E[B(T)] = E[B(0)] = 0$$

Όπως, $B(T) = 2 - 4T$ και συνεπώς

$$E(2 - 4T) = 0,$$

$$2 - 4E(T) = 0$$

$$E(T) = \frac{1}{2}$$

10. Λόγω του Θεωρήματος Τερματισμού της martingale

$$E[B(T)] = E[B(0)] = 0$$

Όπως, $B(T) = \frac{x - \mu T}{\sigma}$ και συνεπώς

$$E\left(\frac{x - \mu T}{\sigma}\right) = 0 \Rightarrow E(T) = \frac{x}{\mu}$$

