Ασκηση 1

Να αποδείξετε ότι τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι 0

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό 1.6, για έναν οποιονδήποτε αντισυμμετρικό πίνακα ισχύει

$$A = -A^T$$

Οπως γνωρίζουμε μπορούμε να γράψουμε έναν πίνακα A ως

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \quad , i=1,\dots,n \quad \text{και} \quad j=1,\dots,n$$

Με βαση τον τελευταίο τροπο γραφής έχουμε ότι για έναν αντισυμμετρικό πίνακα θα πρέπει να ισχύει

$$a_{ij} = -(a_{ji}) \qquad i=1,\dots,n \quad \text{και} \quad j=1,\dots n$$

Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι εκείνα για τα οποία πρέπει να ισχύει $i=j$

Αρα για τα στοιχεία ενος αντισυμμετρικου πίνακα που ανήκουν στην κυρια διαγώνιο θα πρέπει να ισχύει

$$a_{ii} = -a_{ii}$$
$$2a_{ii} = 0$$
$$a_{ii} = 0 \qquad \forall\ i=1,\dots,n$$

Ασκηση 2

Εστω ο παρακάτω πινακας A

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

Μετατρέψτε τον σε ανοιγμένο κλιμακωτό

<u>Λύση</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to 2r_1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_1 + 3r_1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 3r_1}$$

Κλιμακωτός $\leftarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7/3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 7/3\, r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \frac{1}{3} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$ Ανοιγμένος Κλιμακωτός

*** Σημείωση: Πάντα όταν θέλουμε να μετατρέψουμε έναν πίνακα σε ανοιγμένο κλιμακωτό πρώτα τον μετατρέπουμε σε κλιμακωτό και έπειτα σε ανοιγμένο κλιμακωτό

Ασκηση 3

Εστω οι παρακάτω πίνακες

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Να υπολογιστουν τα παρακάτω γινομενα

α) $\Delta = A \cdot B$ β) $E = B \cdot \Gamma$ γ) $Z = A \cdot \Gamma$ δ) $\Theta = AB\Gamma$

Λυση

$(\delta_{ij}) = \underset{1\times 3}{\Delta} = \underset{1\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 3}{B}$

$\delta_{11} = (2 \quad 4)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 4 + 2\cdot 4 = 8 + 8 = 16$

$\delta_{12} = (2 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 0 = 2$

$\delta_{13} = (2 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 + 4\cdot 1 = 8$

Άρα ο πίνακας $\Delta = A\cdot B$ θα έχει τη μορφή

$\Delta = (\delta_{ij}) = (\delta_{11} \; \delta_{12} \; \delta_{13}) = (16 \quad 2 \quad 8)$

β) $E = B \cdot \Gamma$

Θα ισχύει $\underset{2\times3}{B} \cdot \underset{3\times2}{\Gamma} = \underset{2\times2}{E}$

$\varepsilon_{11} = (4 \cdot 1 \quad 2)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 4\cdot2 + 1\cdot1 + 2\cdot0 = 9$

$\varepsilon_{12} = (4 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} = 4\cdot0 + 1\cdot5 + 2\cdot1 = 7$

$\varepsilon_{21} = (2 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot2 + 0\cdot1 + 1\cdot0 = 4$

$\varepsilon_{22} = (2 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} = 2\cdot0 + 0\cdot5 + 1\cdot1 = 1$

Αρα ο πινακας $E = B \cdot \Gamma$ θα είναι

$$E = B \cdot \Gamma = \begin{pmatrix}9 & 7\\4 & 1\end{pmatrix}$$

γ) $Z = A \cdot \Gamma$

Αυτος ο πολλαπλασιασμος δεν είναι εφικτος καθώς του πλήθος των στηλών του αριστερου πινακα (A) είναι διαφορετικό από το πλήθος των στηλών του δεξιά πινακα (Γ)

$$\underset{1\times \underbrace{2)\ (3}}{A \cdot \Gamma}_{\times 2}$$

$2 \neq 3 \Leftrightarrow$ Ανεφικτος Πολλαπλασιασμός δ) $\Theta = A \cdot B \cdot \Gamma$

Μπορουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα Θ είτε απο την $\Theta = A \cdot E$ είτε απο την $\Theta = \Delta \cdot \Gamma$

Εδω θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη ισοτητα.
(Επαληθεύστε μόνοι σας την δεύτερη !)

$$\underset{1\times 2}{\Theta} = \underset{1\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{E}$$

$$\Theta_{11} = (2 \ \ 4)\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 18 + 16 = 34$$

$$\Theta_{12} = (2 \ \ 4)\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 14 + 4 = 18$$

Αρα $\Theta = (34 \ \ 18)$

Ασκηση 4

Εστω ότι A, B είναι δυο τετραγωνικοί πινακες, τέτοιοι ώστε $A \cdot B = B \cdot A$. Τότε να αποδειχθουν τα ακόλουθα

α) $(A+B)(A+B) = AA + 2A \cdot B + BB$

β) $(A+B)(A-B) = AA - BB$

Λύση

α) $(A+B)(A+B) =$

$= A \cdot (A+B) + B(A+B)$ (Δεξιά Επιμεριστική

$= (A \cdot A + A \cdot B) + (BA + BB)$ (Αριστερα Επιμεριστική)

$= A \cdot A + (AB + (BA + BB))$ (Προσεταιριστική)

$= AA + ((AB + BA) + BB)$ (Προσεταιριστική)

$= AA + ((AB + AB) + BB)$ (Εκφώνηση)

$= AA + (2AB + BB)$

$= AA + 2AB + BB$

β) $(A+B)(A-B)$

$= (A+B)(A+(-B))$ (Θεώρημα 1.1)

$= A(A+(-B)) + B(A+(-B))$ (Δεξιά Επιμεριστική)

$= AA + A(-B) + BA + B \cdot (-B)$ (Αριστερα Επιμεριστική)

$= AA + A(-1 \cdot B) + BA + B \cdot (-1 \cdot B)$ (Θεώρημα 1.1)

$= AA + (-1)AB + BA + (-1)(B \cdot B)$ (Θεώρημα 1.4)

$= AA - AB + BA - BB$ (Θεώρημα 1.1)

$= AA - AB + AB - BB$ (Πόρισμα 1.1)

$= AA - BB$ (Πορισμα 1.1)

Ασκηση 5

Εστω $a, b \in \mathbb{F}$, $\nu, \kappa, \lambda, \mu$ είναι θετικοί ακεραιοι και $A = (a_{ij})_{\nu \times \kappa}$, $B = (b_{ij})_{\kappa \times \lambda}$, $\Gamma = (\gamma_{ij})_{\lambda \times \mu}$. Να αποδείξετε ότι $A(B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$

Λύση

Για να αποδείξουμε την ισότητα $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$ αρκεί να αποδείξουμε ότι τα δυο μελη της ισότητας, που είναι $\nu \times \mu$ πίνακες, είναι ίσα.

$A \cdot (B \cdot \Gamma)$ Ας δουμε τώρα ποιο είναι το (i,j) στοιχείο του $A \cdot (B \cdot \Gamma)$
Το (s,j)-στοιχείο του $A \cdot B$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\lambda} b_{st} \gamma_{tj} = (b_{s1} \; b_{s2} \cdots b_{s\lambda}) \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{\lambda j} \end{pmatrix}$$

άρα το στοιχείο του $A(B \cdot \Gamma)$ στη θέση (ij) είναι το

$$\sum_{s=1}^{\kappa} a_{is} \left(\sum_{t=1}^{\lambda} b_{st} \gamma_{tj} \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{\kappa} \left(\sum_{t=1}^{\lambda} a_{is} (b_{st} \cdot \gamma_{tj}) \right) \qquad (\text{Σχέση } 5.1)$$

$(A \cdot B) \cdot \Gamma$ Ας δουμε τώρα ποιο είναι το ij στοιχείο του $(A \cdot B) \cdot \Gamma$. Το (i,s)-στοιχείο του $(A \cdot B)$ είναι

$$\sum_{t=1}^{\kappa} a_{it} b_{ts} = (a_{i1} \; a_{i2} \cdots a_{i\kappa}) \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{\kappa s} \end{pmatrix}$$

Άρα το (i,j) στοιχείο των $(A\cdot B)\cdot \Gamma$ είναι το

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\left(\sum_{t=1}^{\kappa} a_{it}\beta_{ts}\right)\cdot \gamma_{sj}$$

$$= \sum_{s=1}^{\lambda}\left(\sum_{t=1}^{\kappa} (a_{it}\beta_{ts})\cdot \gamma_{sj}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{\lambda}\left(\sum_{s=1}^{\kappa} a_{is}(\beta_{st}\gamma_{tj})\right) \qquad (\text{Σχεση } 5.2)$$

Όμως απο τις σχέσεις (5.1) και (5.2) έχουμε

$$\sum_{s=1}^{\kappa}\left(\sum_{t=1}^{\lambda} a_{is}(\beta_{st}\gamma_{tj})\right) = \sum_{t=1}^{\lambda}\left(\sum_{s=1}^{\kappa} a_{is}(\beta_{st}\gamma_{tj})\right)$$

Αφου τα i,j είναι τυχαία ισχύει ότι όλα τα (i,j)-στοιχεία των $A\cdot(B\cdot\Gamma)$ και $(A\cdot B)\cdot\Gamma$ είναι ίσα άρα επίσης ισχύει

$$A(B\cdot\Gamma) = (A\cdot B)\cdot\Gamma$$

Άσκηση 6

Αν οι A και B είναι μxμ πίνακες και ο A είναι αντιστρέψιμος τότε να λυθεί η εξίσωση ως προς **X**.

$$X \cdot A + B = \mathbb{O}$$

Λύση

$$X \cdot A + B = \mathbb{O}$$
$$X \cdot A = -B$$
$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = -B A^{-1}$$
$$X \cdot (A A^{-1}) = -B A^{-1}$$
$$X \cdot I_{\mu} = -B A^{-1}$$
$$X = -B \cdot A^{-1}$$

Συνεπώς η λύση της εξίσωσης ως προς τη μεταβλητή X είναι, $X = -B \cdot A^{-1}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για να είναι εφικτές οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων θα πρέπει ο άγνωστος πίνακας X να έχει διαστάσεις μxμ !

Ασκηση 7

Εστω ο πινακας $A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Να εξεταστει εάν ο A αντιστρέφεται (δηλαδη εαν υπαρχει ο πινακας A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$)

<u>Λύση</u>

Αρχικά ενας πινακας για να αντιστρέφεται πρέπει να είναι τετραγωνικός. Εφοσον ο A είναι τετραγωνικός, έστω ότι ο $B = A^{-1}$ είναι

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$$

Για να δουμε εαν ο B είναι όντως ο αντίστροφος του A θα πρέπει να υπολογίσουμε τα γινόμενα

$$A \cdot B \quad \text{και} \quad B \cdot A \quad \text{και να είναι ίσα με } I_2$$

Αλλα χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.6 (που λέει ότι ο αντίστροφος αν υπάρχει είναι μοναδικος). Άρα αρκει να υπολογίσουμε μόνο ένα απο τα παραπάνω γινόμενα.

Το γινομενο $B \cdot A = I_2$ είναι

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha + 2\beta & 14\alpha + 4\beta \\ 7\gamma + 2\delta & 14\gamma + 4\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Απο την ισότητα προκυπτει το παρακάτω 4×4 σύστημα (με αγνώστους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

$7a + 2\beta = 1$
$14a + 4\beta = 0$
$7\gamma + 2\delta = 0$
$14\gamma + 4\delta = 1$

Πολλαπλασιάζουμε την πρωτη εξίσωση με το 2 και την αφαιρούμε από την δευτερη. Αυτο μας δίνει

$$\begin{array}{r} 14a + 4\beta = 0 \\ (-)\ 2(7a + 2\beta) = 2 \\ \hline 0 = -2 \end{array}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο. Συνεπώς ο πίνακας A δεν έχει αντίστροφο.

Ασκηση 8

Εστω ενας πινακας A ο οποιος είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι και ο πινακας A^T είναι επίσης αντιστρέψιμος και ισχύει

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Λύση

Από τον ορισμό για τον αντίστροφο πίνακα ισχύει ότι αν ο A^T είναι αντιστρέψιμος τότε θα υπαρχει ενας (μοναδικός) πίνακας B τέτοιος ώστε

$$A^T \cdot B = B A^T = I$$

Ας υποθέσουμε ότι $B = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Δηλαδή ισχυριζόμαστε ότι τον ρόλο του αντίστροφου μπορεί να παίξει ο $(A^{-1})^T$. Ας το επαληθεύσουμε.

Εχουμε

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I$$

Ομοίως έχουμε

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

Άρα αποδείξαμε ότι ισχύει $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$