Ασκηση 1 (Πρόταση 2.2)

Εστω Y ενα μη κενό σύνολο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V. Να αποδείξετε ότι η τομή των υποχώρων αυτών είναι ένας υπόχωρος του V.

Λύση

Εστω $A_i, i=1,\dots k$ όλοι οι υπόχωροι του V. Άρα το σύνολο Y είναι ίσο με

$$Y = \{ A_i \mid A_i \subseteq V \}$$

I) Εφόσον A_i είναι υπόχωρος του V, $\forall i=1,\dots k$ (δηλαδή $A_i \subseteq V$) γνωρίζουμε (από τον ορισμό 2.2 για διανυσματικούς υποχώρους) ότι $0_V \in A_i$, $\forall i=1,\dots k$

Εφόσον $0_V \in A_i$, $\forall i=1,\dots k$ θα πρέπει επίσης να ισχύει $0_V \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i \equiv A$ (A είναι η τομή των $A_i, i=1,\dots k$)

II) Έστω $x,y \in A$. Εφόσον τα στοιχεία x,y ανήκουν στην τομή των υποχώρων A, θα πρέπει να ανήκουν σε κάθε υπόχωρο επίσης. Δηλαδη έχουμε ότι

$$x,y \in A_i \,,\ \forall i=1,\dots,k$$

Εφόσον υποθέσαμε ότι A_i είναι υπόχωροι του V θα έχουμε ότι

$$x+y \in A_i \,,\ \forall i=1,\dots,k$$

Αρα $x+y \in A \equiv \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ (Η πρόσθεση δυο τυχαιων διανυσμάτων του A, ανηκει επίσης στο A.

III) Με παρόμοια λογική όπως στο (II) αποδεικνύεται ότι αν $x \in A$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε $\lambda \cdot x \in A$ καθώς $\lambda x \in A_i, \forall i = 1, \ldots, K$

Άρα εφόσον

1) $0_V \in A$
2) $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$
3) $\lambda \in F, x \in A \Rightarrow \lambda x \in A$

θα ισχύει ότι το σύνολο A που προκύπτει από την τομή των υποχώρων $\left(A \equiv \bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)$, είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V

Ασκηση 3:

Αποδείξτε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα Φ.2.1. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολό του. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Το σύνολο B είναι μια βάση του V.
2) Κάθε στοιχείο w του V γράφεται με <u>μοναδικό</u> τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B

Απόδειξη: $B=\{b_1, b_2, \ldots b_\nu\}$

(1)=>(2) Εστω τώρα ότι ισχύει το 1. Αν w είναι ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου V, τότε επειδή $B=\{b_1, b_2, \ldots b_\nu\}$ είναι βάση του V θα έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $i=1,\ldots \nu$ τέτοια ώστε

$$w=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_\nu b_\nu \qquad (3.1)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει και άλλος τρόπος να εκφράσουμε το διάνυσμα w ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του **B**. Συγκεκριμένα έστω $\mu_i \in \mathbb{F}$ $i=1,\ldots \nu$ και το w μπορεί να γραφτεί ~~ως~~ ως

$$w=\mu_1 b_1+\mu_2 b_2+\ldots+\mu_\nu b_\nu \qquad (3.2)$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των σχέσεων (3.1) και (3.2) έχουμε

$$\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_\nu b_\nu=\mu_1 b_1+\mu_2 b_2+\ldots+\mu_\nu b_\nu$$

ή $(\lambda_1-\mu_1)b_1+(\lambda_2-\mu_2)b_2+\ldots+(\lambda_\nu-\mu_\nu)b_\nu=0_V \quad (3.3)$

Επειδή υποθέσαμε ότι το σύνολο Β είναι βάση του V
τα διανύσματα-στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Άρα ο μοναδικός τρόπος να ισχύει η σχέση (3.3) είναι αν

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \nu$$
ή
$$\lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, \nu$$

Άρα αν Β είναι βάση τα ω γράφεται με μοναδικό τρόπο
ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Β

(2)=>(1) Έστω τώρα ότι ισχύει το 2. Απο την υπόθεση έχουμε ότι
το σύνολο Β παράγει τον χώρο V. Μένει να αποδείξουμε ότι
το Β είναι και γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θεωρούμε λοιπόν
ένα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του Β ίσο με το
0_V:

$$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_\nu b_\nu = 0_V$$

Το 0_V όμως γράφεται κατά τετριμμένο τρόπο ως εξής

$$0_{\mathbb{F}} b_1 + 0_{\mathbb{F}} b_2 + \dots + 0_{\mathbb{F}} b_\nu = 0_V$$

Εφόσον υποθέσαμε ότι ισχύει το (2), η μοναδικότητα γραφής
καθε στοιχείου όπως έχουμε υποθέσει οδηγεί στο συμπέρασμα
$\xi_i = 0_{\mathbb{F}}$, $i = 1, \dots, \nu$.

Άρα αποδείξαμε ότι (1) => (2) και (2) => (1), άρα (1) <=> (2)

Πρόταση Φ.2.2: Εστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν ένας φυσικός αριθμός. Τότε κάθε δυο απο τις παρακάτω προτάσεις συνεπάγεται την τρίτη

1) Η διάσταση του χώρου V είναι ν
2) Το σύνολο $\{a_1, \dots a_\nu\}$ παράγει τον χώρο V
3) Το σύνολο $\{a_1, \dots a_\nu\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

- <u>Απόδειξη</u>: Εστω οτι ισχύουν τα 1 και 2 και το σύνολο $\{a_1, \dots a_\nu\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε ένα απο τα a_i, $i=1,\dots \nu$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων. Έτσι ο χώρος παράγεται το πολύ απο $\nu-1$ διανύσματα (που είναι γραμμικά ανεξάρτητα).

Γνωρίζουμε όμως ότι αν ο χώρος V παράγεται απο $\nu-1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τότε η διασταση του διανυσματικού χώρου θα είναι $\nu-1$. Εμείς όμως υποθέσαμε οτι ισχύει το (1) (διασταση ίση με ν). Αρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο, που σημαίνει οτι τα a_i, $i=1,\dots \nu$ πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Εστω οτι ισχύουν τα 1 και 3. Τότε απο το πόρισμα υπάρχει μια βάση B του V με $\{a_1, \dots a_\nu\} \subseteq B$. Αλλά $|B| = \nu$ αφου $\dim V = \nu$. Αρα ισχύει και η 2 (χρειαζόμαστε ν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα για να παράγουμε τον V).
- Εστω οτι ισχύουν τα 2 και 3. Τότε απο τον ορισμό της διανυσματικής βάσης και της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου, η διάσταση του V θα είναι ν (άρα ισχύει και η 1).