Ασκηση 1

Να βρείτε την γενική λύση της ακολουθης εξισωσης διαφορών ως προς t

$$\frac{dy}{dt} + 10y = 15 \quad (1) \qquad \text{οπου } y > 0$$

Λύση

Αν $y(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης τότε γνωρίζουμε ότι μπορεί να γραφτεί σαν αθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς διαφορικης (y^c)

$$\frac{dy}{dt} + 10y = 0$$

συν μια οποιαδήποτε μερική λύση της μη ομογενους που επαληθευει την (1), y^p

Αρα $y(t) = y^p + y^c$

Η λύση της ομογενους διαφορικής θα δίνεται από

$$\frac{dy}{dt} + 10y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10y \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -10$$

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \int -10\, dt \Rightarrow \ln y = -10t + c$$

$$y^c = e^{-10t+c} \Rightarrow y^c = e^c e^{-10t} \Rightarrow y^c = Ae^{-10t}$$

Ως μερική λύση μπορούμε να πάρουμε (μαντεύουμε) την πιο απλή συναρτησιακή μορφή που ικανοποιεί την (1). Ας υποθέσουμε ότι η λύση έχει την μορφή

$y^p = k$ όπου k είναι σταθερά

Θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε ότι αυτή είναι λύση αντικαθιστώντας στην (1)

$$\frac{dy^p}{dt} + 10y^p = 15 \Rightarrow \cancel{\frac{dk}{dt}} + 10k = 15 \Rightarrow$$

$$\boxed{y^p = k = \frac{15}{10}}$$

Άρα η γενική λύση της (1) είναι

$$y(t) = Ae^{-10t} + y^p = Ae^{-10t} + \frac{15}{10}$$

όπου A μια σταθερά

Άσκηση 2

Να βρείτε την ορισμένη λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης για $x(0)=$

$$2x'(t)+\left(8e^{2t+3}\right)x(t)=0$$

Λύση

$$2x'+\left(8e^{2t+3}\right)x=0 \Rightarrow x'+4e^{2t+3}x=0$$

Έστω $a(t)=4e^{2t+3}$, τότε

$$x'(t)+a(t)x(t)=0 \Rightarrow x'(t)=-a(t)x(t) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt}=-a(t) \Rightarrow \int\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{\cancel{dt}}\cancel{dt}=-\int a(t)dt$$

$$\ln|x(t)|=-\int a(t)dt+C \Rightarrow |x(t)|=e^{-\int a(t)dt+C}$$

$$x(t)=\pm e^{-\int a(t)dt}\cdot e^{C} \Rightarrow x(t)=\pm Ae^{-\int a(t)dt}$$

Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε το $-\int a(t)dt$ και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη το A (τυχαία σταθερά).

$-\int a(t)dt=-\int 4e^{2t+3}dt$, Έστω $u=2t+3$, $du=2dt$
$dt=du/2$

Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

$$-\int 4e^{u}\frac{du}{2}=-\int 2e^{u}du=-2\int e^{u}du=-2e^{u}=-2e^{2t+3}$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$x(t) = \pm A e^{-2e^{2t+3}}$$

Για $t=0$ $x(0)=1$. Άρα

$$x(0) = 1 = \pm A e^{-2e^{2t+3}} \Rightarrow A = \pm e^{-2e^{-3}}$$

Άρα η ορισμένη λύση θα είναι

$$x(t) = \pm e^{-2e^{-3}} \cdot e^{-2e^{2t+3}}$$

Ασκηση 3

Να λυθει το προβλημα της αρχικής τιμής τετοιο ωστε

$$x'(t) = t + t\,x(t) \quad , x(0)=1 \qquad (2)$$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, μη ομογενεις με μεταβλητους συντελεστες. Παρατηρούμε ότι μπορουμε να την φέρουμε στην παρακάτω μορφή

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t) \qquad a(t) \equiv -t \quad , b(t) \equiv t$$

Για να την λύσουμε θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του συντελεστή ολοκλήρωσης

Εστω $I(t) > 0$ τετοιο ώστε $I'(t) = I(t)\,a(t)$
Πολλαπλασιαζοντας την (2) με $I(t)$ εχουμε

$$I(t)\,x'(t) + I(t)\,a(t)\,x(t) = I(t)\,b(t) \Rightarrow$$

$$I(t)\,x'(t) + I'(t)\,x(t) = I(t)\,b(t) \Rightarrow \quad (\text{απο ορισμο } I(t))$$

$$\frac{d}{dt}\left(I(t)\,x(t)\right) = I(t)\,b(t) \Rightarrow$$

$$\int \frac{d(I(t)\,x(t))}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt} = \int I(t)\,b(t)\,dt \Rightarrow$$

$$I(t)\,x(t) = \int I(t)\,b(t)\,dt + c \quad (3)$$

Απο τον ορισμό του $I'(t) = a(t)\, I(t)$
παρατηρούμε ότι έχουμε μια διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{I(t)} I'(t) = a(t) \Rightarrow \frac{1}{I(t)} \cdot \frac{dI(t)}{dt} = a(t) \Rightarrow \int \frac{1}{I} \frac{dI}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = \int a(t)\,dt$$

$$\overset{I>0}{\ln I(t)} = \int a(t)\,dt \Rightarrow I(t) = e^{\int a(t)\,dt} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) έχουμε

$$e^{\int a(t)dt} x(t) = \int e^{\int a(t)dt} \cdot b(t)\,dt + c \Rightarrow$$

$$x(t) = \left(e^{-\int a(t)dt}\right)\left[\int \left(e^{\int a(t)dt}\right) \cdot b(t)\,dt + c\right] \quad 5$$

Άρα στο παράδειγμά μας από την (5) έχουμε

$$x(t) = e^{-(-\int t\,dt)} \cdot \left[\int t\, e^{-\int t dt} dt + c\right] \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \left(\int t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt + c\right)$$

Παρατηρείστε ότι $\quad t e^{-\frac{t^2}{2}} = -f'(t)\, e^{f(t)}$

Άρα

$$\int \cancel{-} f'(t)\, e^{f(t)}\, dt = -e^{f(t)}$$

οπότε

$$x(t) = e^{t^2/2} \cdot \left(-e^{-t^2/2} + c\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = c\,e^{t^2/2} - 1}$$ Γενική λύση

Για $x(0)=1$ έχουμε

$$x(0) = 1 = e^{\frac{0^2}{2}} c - 1 \Rightarrow$$

$$1 = ce^0 - 1 \Rightarrow 1 = c - 1 \Rightarrow c = 2$$

Άρα η ορισμένη λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$x(t) = 2e^{t^2/2} - 1$$

Ασκηση 5

Εστω η εξίσωση διαφορών

$$a_{t+1} = (1+r)a_t + y_{t+1} - c_{t+1}$$

οπου a_t: η αξία ενός περιουσιακού στοιχείου που προσδίδει αποδοση r ανα περίοδο, y_t: εισοδημα απο άλλες πηγές και c_t: η κατανάλωση του ατόμου την περίοδο t

Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση διαφορών

Λύση

Εστω $x_t \equiv y_t - c_t \quad \forall t = 0, 1 \ldots$

Εχουμε τα ακολουθα

- $a_1 = (1+r)a_0 + y_1 - c_1 \iff a_1 = (1+r)a_0 + x_1$
- $a_2 = (1+r)a_1 + x_2 \iff a_2 = (1+r)[(1+r)a_0 + x_1] + x_2 \iff$
  $a_2 = (1+r)^2 a_0 + (1+r)x_1 + x_2$
- $a_3 = (1+r)a_2 + x_3 = (1+r)[(1+r)^2 a_0 + (1+r)x_1 + x_2] + x_3$
  $a_3 = (1+r)^3 a_0 + (1+r)^2 x_1 + (1+r)x_2 + x_3$

$$a_t = (1+r)^t a_0 + \sum_{k=0}^{t-1} (1+r)^k x_{t-k} \qquad Φ8.1$$

Εναλλακτικά μπορουμε (αλλαζοντας το πως έχουμε βάλει τα k, t στον ορο που περιέχει το αθροισμα) να γραψουμε την λύση ώς

$$a_t = (1+r)^t a_0 + \sum_{k=1}^{t} (1+r)^{t-k} x_k \qquad Φ8.2$$

Αν αντιμεταθέσουμε τους όρους στην Φ.8.2. (ή ομοίως στην Φ.8.1) μπορούμε να λάβουμε κάποιες ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες. Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (Φ.8.2.) με $(1+r)^{-t}$ έχουμε

$$(1+r)^{-t} a_t = a_0 + \sum_{k=1}^{t} (1+r)^{-k} (y_k - c_k)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου a στην περίοδο t.

Το $\sum_{k=1}^{t} (1+r)^{-k} y_k$ είναι η συνολική παρούσα αξία των εισοδημάτων από την περίοδο 1 έως t

Το $\sum_{k=1}^{t} (1+r)^{-k} c_k$ είναι η συνολική παρούσα αξία της κατανάλωσης του ατόμου από την περίοδο 1 έως την περίοδο t

Ασκηση 5 Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφορών
όταν $y_0 = 1$

$5y_{t+1} + 2y_t = 0$

Λύση

$$5y_{t+1} + 2y_t = 0 \Rightarrow y_{t+1} = -\frac{2}{5}y_t$$

Για $t=0$ $\quad y_1 = -\frac{2}{5}y_0$

Για $t=1$ $\quad y_2 = -\frac{2}{5}y_1 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 y_0$

Για $t>0$ $\quad y_t = \left(-\frac{2}{5}\right)^t y_0$ (Γενική λύση)

Για $y_0 = 1$ έχουμε

$$y_t = \left(-\frac{2}{5}\right)^t \quad \text{(Ορισμένη λύση)}$$

Άσκηση 6 Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y_{t+1} - 2y_t = 10 \quad (1) \qquad y(0) = 1$$

Λύση

Η λύση θα είναι $y_t = y_t^c + y_t^p$ οπου y_t^c είναι η λύση της ομογενούς $y_{t+1} + 2y_t = 0$ και y_t^p είναι μια μερική λύση της (1)

Μαντεύουμε ότι $y_t^c = Ab^t$ Αντικαθιστώντας στην ομογενή έχουμε

$$y_{t+1} - 2y_t = 0 \Rightarrow Ab^{t+1} - 2Ab^t = 0 \Rightarrow b = 2$$

Άρα $y_t = A(2)^t$

Η μερικη λύση μαντεύουμε ότι θα είναι της μορφής $y_t^p = k$. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$k - 2k = 10 \Rightarrow k = -10 = y_t^p$$

Άρα η γενική λύση της 1 είναι $y_t = A\,2^t - 10$

Για να βρούμε την A, αν $t = 0$

$$y_0 = 1 = A\,2^0 - 10 \Rightarrow A = 11$$

Άρα η ορισμένη λύση είναι $y_t = 11(2^t - 10$