Ασκηση 1

Να βρεθουν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πινακα

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση

$$(A - \lambda I)\vec{x}_i = \underline{0} \iff \begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 \\ -8 & 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad \varphi.5.1$$

Πρέπει $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \det\begin{pmatrix} -5 & 1-\lambda \\ -8 & 6 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$+ (1-\lambda) \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(9-\lambda)$$

Αρα οι ιδιοτιμες του πινακα A ειναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 9$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα για την κάθε ιδιοτιμή πάμε στην φ.5.1 και αντικαθιστούμε την καθε ιδιοτιμη και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει για $\lambda_1=1$ $\begin{pmatrix} 9-1 & 0 & 0 \\ -5 & 1-1 & 0 \\ -8 & 6 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 8x &= 0 \\ -5x &= 0 \\ -8x + 6y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x=0,\ y=0,\ z: \text{μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα της $\lambda_1=1$ μπορούν να εκφραστούν σαν το σύνολο

$$V(1) = \{(0,0,k) \mid k\in\mathbb{R}^*\} = \text{span}(0,0,1)$$

για $\lambda_2=1$ Παρόμοια διαδικασία με πάνω

για $\lambda_3=9$ $\begin{pmatrix} 9-9 & 0 & 0 \\ -5 & 1-9 & 0 \\ -8 & 6 & 1-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -5x - 8y &= 0 \\ -8x + 6y - 8z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x = -\frac{8}{5}y,\ z = \frac{47}{20}y$$

Σημείωση: εδώ επιλέξαμε να εκφράσουμε τις συντεταγμένες του ιδιοδιανύσματος ως προς την δεύτερη συντεταγμένη (το y). Θα μπορούσαμε να τις εκφράσουμε είτε ως προς x είτε ως προς z.

Επιλέγοντας ελεύθερα το y το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων είναι

$$V(\lambda_3=9) = \left\{\left(-\frac{8}{5}k,\ k,\ \frac{47}{20}k\right) \mid k\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}$$

Ασκηση 2

Αν το διάνυσμα $\vec{v} = (1,2,0)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & 8 & 12 \\ -32 & 13 & 24 \\ -8 & b & 3 \end{pmatrix}$$

να βρεθουν:

i) Οι τιμές των a, b

ii) Οι ιδιοτιμές του A

Λύση

i) Εφόσον το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A θα πρέπει να ισχύει

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \acute{\eta}$$

$$\begin{pmatrix} a & 8 & 12 \\ -32 & 13 & 24 \\ -8 & b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a + 16 + 0\cdot 12 \\ -32 + 26 + 0\cdot 24 \\ -8 + 2b + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a + 16 \\ -6 \\ -8 + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε το σύστημα (από ισότητα διανυσμάτων)

$$\left.\begin{aligned} a + 16 &= \lambda \\ -6 &= 2\lambda \\ -8 + 2b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = -3, \ a = -19, \ b = 4$$

Οπότε ο συμπληρωμένος πίνακας A είναι

$$A = \begin{pmatrix} -19 & 8 & 12 \\ -32 & 13 & 24 \\ -8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (A - I\cdot\lambda)\vec{v} = \underline{0} \quad \text{ή}$$

$$\begin{pmatrix} -19-\lambda & 8 & 12 \\ -32 & 13-\lambda & 24 \\ -8 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = \underline{0}$$

Πρέπει $\det(A - I\lambda)\vec{v} = 0$. Άρα

$$\det\begin{pmatrix} -19-\lambda & 8 & 12 \\ -32 & 13-\lambda & 24 \\ -8 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 12[-4\cdot 32 - (-8)(13-\lambda)] - 24[4(-19-\lambda) - (-8)\cdot 8] + (3-\lambda)[(-19-\lambda)\cdot(13-\lambda) - (-32)\cdot 8]$$

$$= 12\cdot(-128 + 104 - 8\lambda) - 24(-76 - 4\lambda + 64) + (3-\lambda)(247 - 13\lambda + 19\lambda + \lambda^2 + 256)$$

$$= 12\cdot(-24 - 8\lambda) - 24(-12 - 4\lambda) + (3-\lambda)(+9 + 6\lambda + \lambda^2)$$

$$= -\cancel{288} - \cancel{96\lambda} + \cancel{288} + \cancel{96\lambda} + (3-\lambda)(+9 + 6\lambda + \lambda^2)$$

$$= (3-\lambda)(+9 + 6\lambda + \lambda^2) = 0$$

Οι ιδιοτιμές πρέπει να είναι $\lambda_1 = 3$ που βρήκαμε και στο ερώτημα i) καθώς επίσης και οι δυο ρίζες του διωνύμου $\lambda^2 + 6\lambda + 9$ οι οποίες είναι $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3$.

<u>Άσκηση 3</u>

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$(A - \lambda I)\cdot \vec{v} = \underline{0} \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = \underline{0}$$

Πρέπει η ορίζουσα του $A - \lambda I$ να είναι 0 άρα

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \quad \text{ή}$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) = -4 \iff 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 = -4 \iff 1 - 2\lambda + \lambda^2 = -4 \iff$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Χρησιμοποιούμε την διακρίνουσα για να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $(\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 5)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 5\cdot 1 = 4 - 20 = -16$$

Εφόσον η διακρίνουσα είναι αρνητική, η εξίσωση $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ δεν μπορεί να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό γιατί οι ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (\varphi.5.2)$$

και εφόσον $\Delta < 0$ το $\sqrt{\Delta}$ δεν ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. Άρα ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές και πραγματικά ιδιοδιανύσματα.
Όμως χρησιμοποιώντας τους φανταστικούς και μιγαδικούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε μιγαδικές ιδιοτιμές και μιγαδικά ιδιοδιανύσματα.

Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι ο φανταστικός αριθμός i. ορίζεται ως

$$i = \sqrt{-1}$$

Άρα στην εξίσωση φ.52 χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)\cdot(-\Delta)}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-\Delta)}}{2a} \overset{i=\sqrt{-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\beta \pm i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Αντικαθιστώντας τα β, a, Δ έχουμε

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(-2) \pm i\cdot\sqrt{-(-16)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = \underbrace{1}_{\text{πραγματικό μέρος}} + \underbrace{2i}_{\text{φανταστικό μέρος}} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \underbrace{1}_{\text{πραγματικό μέρος}} - \underbrace{2i}_{\text{φανταστικό μέρος}}$$

Αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα

για $\lambda_1 = 1+2i$

$$\begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -2 \\ 2 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left.\begin{matrix} -2i\,v_1 - 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2i\,v_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad v_2 = -i \cdot v_1$$

Άρα το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων θα είναι

$$V(\lambda_1 = 1+2i) = \{(k, -ik) \mid k \in \mathbb{C}\}$$

*** C είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

για $\lambda_2 = 1-2i$

$$\begin{pmatrix} 1-(1-2i) & -2 \\ 2 & 1-(1-2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left.\begin{matrix} 2iv_1 - 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2iv_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad v_2 = iv_1$$

Άρα το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων θα είναι

$$V(\lambda_2 = 1+2i) = \{(k, ik) \mid k \in C\}$$

Ασκηση 4

Να δειχθεί ότι ένας πινακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μονον αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η φράση "αν και μονο αν" είναι ισοδυναμία. Άρα πρέπει να αποδείξουμε μια σχέση ισοδυναμίας

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n} \iff 0 \notin \{ \lambda \in \mathbb{F} \mid (A-\lambda I)\cdot v = 0 ,\ v \in \mathbb{F}^{n\times 1} \}$$

ή αλλιώς

Υπαρχει ο αντίστροφος του A $\iff$ ο A δεν έχει καποια ιδιοτιμή ιση με το 0.

$\Rightarrow$ Εστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ένα $\lambda = 0$ τότε θα πρέπει να ισχύει

$$\det(A - I\cdot 0) = 0 \iff \det(A) = 0$$

Αλλα υποθέσαμε ότι ο A αντιστρέφεται άρα δεν μπορεί να έχει ορίζουσα ιση με το 0.

$\Leftarrow$ Αφήνεται ως άσκηση

Άσκηση 5

Εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι και να διαγωνοποιηθούν

α) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ β) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Λύση

Για να διαγωνοποιήσουμε έναν πίνακα A χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\Delta = P^{-1} A P$$

Όπου Δ είναι ένας διαγώνιος πίνακας που αντιστοιχεί στον A (και τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές του A) και P ένας πίνακας που έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A

α) Λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση $\det(A-\lambda I)=0$ παίρνουμε ότι $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$ άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται

Τα ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν είναι

$$V(\lambda_1=2) = \{(k,-k) \mid k\in\mathbb{R}\}$$
$$V(\lambda_2=5) = \{(2k,k) \mid k\in\mathbb{R}\}$$

Για $k=1$ ο πίνακας P είναι

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underset{2\times 1}{V(\lambda_1)}$ $\underset{2\times 1}{V(\lambda_2)}$

Οπότε ο διαγώνιος πίνακας θα είναι

$$\Delta = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

β) Η χαρακτηριστική εξίσωση για τον B είναι

$$\det(B-\lambda I) = 0 \iff \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$-(\cancel{-2}+\cancel{2}+2\lambda) \cancel{- 0\cdot((1-\lambda)(-2)-4)} - \lambda(-(1-\lambda)(1+\lambda)-2) = 0$$

$$-2\lambda - \lambda(-(1-\lambda^2)-2) = 0 \iff$$

$$-2\lambda + \lambda(1-\lambda^2) + 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda(1-\lambda^2) = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές του B (οι ρίζες της $\lambda(1-\lambda^2)=0$) είναι

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1$$

Τα ιδιοδιανύσματα θα είναι

για $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} 2v_1 + 2v_2 - v_3 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ 2v_1 - 2v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad v_1 = 0, \quad v_3 = 2v_2$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα για την $\lambda_1 = 1$

Θα προκύπτουν από

$$V(\lambda_1=-1)=\{(0,k,2k) \mid k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

Ομοίως μπορούμε να πάρουμε

$$V(\lambda_2=0)=\{(k,k,3k) \mid k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

$$V(\lambda_3=1)=\{(2k,k,2k) \mid k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

Άρα για $k=1$ τα ιδιοδιανύσματα σε μορφή στηλών θα είναι

$$U_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad U_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\quad U_{\lambda_3}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας P_B θα είναι

$$P_B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&3&2\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_B^{-1}=\frac{1}{\det P}\,\mathrm{adj}\,P_B=\begin{pmatrix}-1/2&2&-1/2\\0&-2&1\\1/2&1&-1/2\end{pmatrix}$$

Ο διαγώνιος πίνακας θα δίνεται από

$$\Delta=P_B^{-1}BP_B=\ldots=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ασκηση 6

Για τους πινακες της ασκησης 5 να υπολογισετε τους πινακες
α) A^{5000} β) B^{2010}

Λύση

Ειδαμε στην άσκηση 5 ότι οι πινακες A, B είναι διαγωνοποιήσιμοι καθως έχουν οκαθενας τους μη επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές.

Εστω ότι θελουμε να υπολογίσουμε εναν πινακα

$A^n, n \in \mathbb{N}$

Αυτός ο πινακας ισουται με το n-φορες γινομενο του πινακα A, δηλαδή

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-φορές}}$$

Αν γνωρίζουμε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε θα ισχύει

$\Delta_A = P_A^{-1} A P_A$ όπου Δ_A ο διαγώνιος πινακας

που στην κύρια διαγώνιο ~~έχει~~ τις ιδιοτιμες του A στην διαγώνιο και P_A ο πινακας που σχηματίζεται απο τα ιδιοδιανύσματα του A

Τοτε θα έχουμε

$$\Delta_A = P_A^{-1} A P_A \Leftrightarrow P_A \Delta_A = P_A P_A^{-1} A P_A \Leftrightarrow P_A \Delta_A = A P_A \Leftrightarrow$$

$$P_A \Delta_A P_A^{-1} = A P_A P_A^{-1} \Leftrightarrow \boxed{A = P_A \Delta P_A^{-1}}$$

Αρα, $A^n = (P_A \Delta_A P_A^{-1})$

$$= \underbrace{(P_A \Delta_A P_A^{-1}) \cdot (P_A \Delta_A P_A^{-1}) \cdot \ldots \cdot (P_A \Delta_A P_A^{-1})}_{n\text{-φορες}}$$

$$= P_A \Delta_A P_A^{-1} P_A \Delta_A P_A^{-1} \ldots P_A \Delta_A P_A^{-1}$$

$$= P_A \Delta_A^n P_A^{-1}$$

Η δύναμη Δ^n οπου Δ είναι ενας διαγώνιος πίνακας ισούται με τον πίνακα που έχουμε υψώσει τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου στην n δύναμη, δηλαδή

$$\underset{k\times k}{\Delta^n} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & \delta_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \delta_{kk} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \delta_{11}^n & 0 & & 0 \\ 0 & \delta_{22}^n & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \delta_{kk}^n \end{pmatrix}$$

Αρα στο παράδειγμά μας

a) $A^n = P_A \Delta_A^n P_A^{-1}$ οπου $n = 5000$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{5000} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{5000} & 0 \\ 0 & 5^{5000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

B) $B^n = P_B B^n P_B^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2010} \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{2010} & 0 & 0 \\ 0 & 0^{2010} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2010} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$= \dots$