Ασκηση 1: Να υπολογισετε τις οριζουσες των παρακατω πινάκων

α) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ β) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

γ) $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Λύση

Οταν υπολογιζουμε μια οριζουσα μας βολευει να την υπολογιζουμε ως προς την γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικα.

α)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (\text{ως προς γραμμή } i)$$

$$\det(A_{11}) = \det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 - 0\cdot 5 = -2$$

$$\det(A_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 0\cdot 2 - 4\cdot 5 = -20$$

$$\det(A_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0 - (-1)\cdot 4 = 4$$

$$\det(A) = (-1)^{1+1}\cdot(2)\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}\cdot(1)\det(A_{12}) + (-1)^{1+3}(0)\det(A_{13})$$

$$= -4 + (-1)(-20) + 1\cdot 0\cdot 4 = 16$$

β) Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα Β θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Sarrus. Ο κανόνας του Sarrus είναι ένας πολύ εύκολος τρόπος να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός 3x3 πίνακα.

Προσοχή!!! Ο κανονας του Sarrus εφαρμόζεται <u>ΜΟΝΟ</u> σε 3x3 πινακες

Εχουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα Β όπου

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Φτιάχνουμε έναν επαυξημένο πίνακα όπου στα δεξιά γράφουμε τις <u>δυο πρώτες στήλες</u> του πίνακα Β Δηλαδή

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \end{array} \\ B' = & \left(\begin{array}{ccc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{array}\right) \\ & \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array} \end{array}$$

και όπως φαίνεται παραπανω παιρνουμε τα ακόλουθα σταυρωτα γινόμενα με το ανάλογο πρόσιμο μπροστά Δηλαδή

$$\det(B) = b_{11}b_{12}b_{13} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}$$

$$\det(B) = 0\cdot1\cdot0 + 0\cdot4\cdot2 + (-3)\cdot2(-2) - 2\cdot1\cdot(-3) - (-2)\cdot4\cdot0 - 0\cdot2\cdot0$$

$\det(B) = 0 + 0 + 12 + 6 + 0 - 0$

$\det(B) = 18$

γ) Ένας πιο πρακτικός τρόπος να υπολογίζουμε ορίζουσες μέσω του αναπτύγματος Laplace είναι ο ακόλουθος

Γράφουμε τα πρόσημα (+), (-) εναλλάξ πάνω από το κάθε στοιχείο του πίνακα ως εξής

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \overset{(+)}{1} & \overset{(-)}{2} & \overset{(+)}{0} & \overset{(-)}{1} \\ \overset{(-)}{0} & \overset{(+)}{3} & \overset{(-)}{0} & \overset{(+)}{2} \\ \overset{(+)}{2} & \overset{(-)}{0} & \overset{(+)}{-1} & \overset{(-)}{4} \\ \overset{(-)}{1} & \overset{(+)}{2} & \overset{(-)}{0} & \overset{(+)}{8} \end{pmatrix}$$

Αυτά τα πρόσημα αντιστοιχούν στο $(-1)^{(i+j)}$ του αναπτύγματος Laplace. Έπειτα επιλέγουμε τη γραμμή ή στήλη με τα περισσότερα μηδενικά. Στην περίπτωσή μας είναι η τρίτη στήλη

Άρα υπολογίζουμε την ορίζουσα γύρω από την τρίτη στήλη

$$\det(\Gamma) = (+)\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{0} & \overset{-}{4} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{8} \end{pmatrix} (-)\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{0} & \overset{-}{4} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{8} \end{pmatrix}$$

$$(+)(-1)\cdot \det\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{3} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{8} \end{pmatrix} (-)\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{3} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{2} & \overset{-}{0} & \overset{+}{4} \end{pmatrix}$$

$\det(\Gamma) = -1 \cdot (21) = -21$

Άσκηση 2

Να αντιστρέψετε τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

A) Πάντα όταν έχουμε εναν διαγώνιο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ ο αντίστροφός του A^{-1} είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Άρα στην περίπτωσή μας έχουμε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}$$

Για επαλήθευση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον A με τον A^{-1} που βρήκαμε (είτε απο δεξιά είτε απο αριστερά) και θα πρέπει να πάρουμε σαν αποτέλεσμα τον μοναδιαίο

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} 8\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 8\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot 0 & 8\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{20} \\ 0\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 5\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 5\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{20} \\ 0\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot 0 + 20\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{5} + 20\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 20\cdot\frac{1}{20} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B) Απο την ενότητα 5.3 γνωριζουμε ότι ο αντιστροφος του πινακα B θα ειναι ισος με

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \operatorname{adj} B$$

οπου adj B ειναι ο προσαρτημένος πινακας του B. Ο προσαρτημένος adj B θα ειναι ο ανάστροφος του πινακα αλγεβρικών συμπληρωμάτων C (του πινακα B).

Ο πινακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων C ειναι ισος με

$$C = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det B_{11} & (-1)^{1+2} \det B_{12} \\ (-1)^{2+1} \det B_{21} & (-1)^{2+2} \det B_{22} \end{bmatrix}$$

Εχουμε

$$\det B_{11} = \det \begin{bmatrix} \cancel{10} & \cancel{4} \\ \cancel{5} & 3 \end{bmatrix} = 3 \qquad \det B_{12} = \det \begin{bmatrix} \cancel{10} & \cancel{4} \\ 5 & \cancel{3} \end{bmatrix} = 5$$

$$\det B_{21} = \det \begin{bmatrix} \cancel{10} & 4 \\ \cancel{5} & \cancel{3} \end{bmatrix} = 4 \qquad \det B_{22} = \det \begin{bmatrix} 10 & \cancel{4} \\ \cancel{5} & \cancel{3} \end{bmatrix} = 10$$

Αρα ο πινακας C ειναι $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

Ο προσαρτημένος θα ειναι

$$\operatorname{adj} B = C^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Επίσης $\det B = (10 \cdot 3 - 4 \cdot 5) = 10$

Άρα ο B^{-1} είναι

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \operatorname{adj} B = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Για επαλήθευση υπολογίζουμε το γινόμενο

$$B B^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \cdot 0,3 - 4 \cdot 0,5 & -10 \cdot 0,4 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 0,3 - 3 \cdot 0,5 & -0,4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 & -4 + 4 \\ 1,5 - 1,5 & -2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα ο $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$ είναι πράγματι αντίστροφος του B

Γ) Χρησιμοποιούμε πάλι την ίδια λογική

$$\Gamma = \frac{1}{\det \Gamma} \operatorname{adj} \Gamma$$

Έχουμε

$$\det \Gamma = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + [3 \cdot 1 - (-5) \cdot 0] + [4 \cdot 1 - (-5) \cdot 2]$$

$$= 3 + 14$$

$$= 17$$

Ο πίνακας C των αλγεβρικών συμπληρωμάτων θα είναι

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det\Gamma_{11} & (-1)^{1+2}\det\Gamma_{12} & (-1)^{1+3}\det\Gamma_{13} \\ (-1)^{2+1}\det\Gamma_{21} & (-1)^{2+2}\det\Gamma_{22} & (-1)^{2+3}\det\Gamma_{23} \\ (-1)^{3+1}\det\Gamma_{31} & (-1)^{3+2}\det\Gamma_{32} & (-1)^{3+3}\det\Gamma_{33} \end{pmatrix}$$

Οι ελάσσονες ορίζουσες είναι

$$\det\Gamma_{11} = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 4\cdot 1 - (-1)\cdot 3 = 4 + 3 = 7$$

$$\det\Gamma_{12} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$\det\Gamma_{13} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$\det\Gamma_{21} = \det\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$\det\Gamma_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\Gamma_{23} = \det\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\det\Gamma_{31} = \det\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\det\Gamma_{32} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det\Gamma_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - (-5)\cdot 2 = 14$$

Άρα ο πίνακας C των αλγεβρικών συμπληρωμάτων θα είναι

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του Γ θα είναι

$$\operatorname{adj}\Gamma = C^T = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Και τέλος ο Γ^{-1} θα είναι

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{|\Gamma|} \operatorname{adj}\Gamma = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 3

Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 28 \\ 2x + 5y &= 42 \end{aligned}$

β) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

Λύση

α) Γραφουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} 4x + 3y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{z}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{d}{\begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}}$$

Αρα $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = z = A^{-1} \cdot d$ οπότε πρέπει να βρούμε τον A^{-1}.

$\det A = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14$

$\det A_{11} = 5$, $\det A_{12} = 2$, $\det A_{21} = 3$, $\det A_{22} = 4$

$C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\operatorname{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$

Οπότε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{2}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \cdot \frac{5}{14} - 42 \frac{3}{14} \\ -28 \cdot \frac{2}{14} + 42 \frac{4}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 9 \\ -4 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Άρα (απο ισότητα πινάκων) $x = 1$, $y = 8$

β) Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}}_{C}$$

Πρέπει να βρούμε τον B^{-1}

$$\det B = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot (12 + 1) - (-8 - 3) - 5 \cdot (2 - 9)$$

$$= 52 + 11 + 35 = 98$$

$\det B_{11} = 13$ $\quad \det B_{12} = -11$ $\quad \det B_{13} = -7$

$\det B_{21} = -1$ $\quad \det B_{22} = 31$ $\quad \det B_{23} = -7$

$\det B_{31} = 16$ $\quad \det B_{32} = -6$ $\quad \det B_{33} = 14$

Ο πινακας αλγεβρικων συμπληρωμάτων είναι

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

Ο προσαρτημένος είναι

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

Άρα $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \text{adj } B = \dfrac{1}{98} \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

Η λύση του συστήματος είναι

$$B^{-1} \cdot B x = B^{-1} c \Rightarrow I_3 x = B^{-1} c \Rightarrow x = B^{-1} c$$

$$x = \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$.

Λύση (Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer)

α) Το σύστημα σε μορφή πινάκων είναι

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \cdot \underset{z}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{d}{\begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}}$$

Από τον κανόνα του Crammer γνωρίζουμε ότι

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_1 \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_2$$

Έχουμε

$\det A = 14$

$$\det A_1 = \det \begin{pmatrix} 28 & 3 \\ 42 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 28 - 3 \cdot 42 = 14$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 28 \\ 2 & 42 \end{pmatrix} = 4 \cdot 42 - 2 \cdot 28 = 112$$

Άρα

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{14}{14} = 1 \quad \text{και} \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{112}{14} = 8$$

β) Το σύστημα σε μορφή πίνακα γράφεται ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}}_{C}$$

Απο τον κανόνα του Crammer έχουμε

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

Αναλυτικά

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 \\ 12 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{1}{98} \cdot 196 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -2 & 12 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{1}{98} \cdot 490 = 5$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{1}{98} 98 = 1$$

Ασκηση 4 - Υπόδειγμα Εισροων - Εκροών Leontief

Εστω ότι σε μια οικονομία υπάρχουν 3 επιχειρήσεις $i=1,2,3$ που η καθε μια παραγει ενα προϊόν $x_i, i=1,2,3$.
Η τεχνολογια είναι τέτοια ώστε η κάθε επιχείρηση να χρησιμοποιεί όλα τα αγαθά $x_i, i=1,2,3$ στην παραγωγική της διαδικασία. Συγκεκριμένα η επιχείρηση i παράγει αγαθό x_i, έστω ότι η επιχείρηση $j, j=1,2,3$ χρειάζεται a_{ij} μονάδες από τον κλάδο i. Επίσης υπάρχουν καταναλωτές οι οποίοι αγοράζουν το αγαθο για ιδιωτική κατανάλωση. Αρα η κάθε επιχείρηση πρεπει να καλύψει την ζήτηση που προέρχεται από τις άλλες επιχειρήσεις, και την ζήτηση που προέρχεται απο τους καταναλωτές. Με βαση τα παραπάνω έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + d_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + d_2 \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + d_3 \end{aligned}\right\} \quad x = Ax + d$$

Ο συντελεστής a_{ij} σημαίνει ότι απο τις συνολικές μονάδες προϊόντος x_i που παράγει η επιχείρηση i, οι a_{ij} πηγαίνουν στην παραγωγή του προϊόντος x_j. Εχουμε $a_{ij} \in (0,1)$ και $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} < 1$

Τα $d_i, i=1,2,3$ είναι η εξωτερική ζήτηση για το προϊόν x_i

Μπορούμε να ανακατατάξουμε τους όρους στις παραπάνω εξισώσεις ως εξής

$$\begin{aligned} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 &= d_1 \\ -a_{21}x_1 + x_2 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 &= d_2 \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + x_3 - a_{33}x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1-a_{11})x_1 \; - a_{12}x_2 \; - a_{13}x_3 &= d_1 \\
-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - a_{23}x_3 &= d_2 \\
-a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (1-a_{33})x_3 &= d_3
\end{aligned}
$$

ή $$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & (1-a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ή $$(I-A)x = d$$

Οπότε η λύση στο υπόδειγμα εισροών-εκροών θα δίνεται από

$$(I-A)^{-1} \cdot (I-A) \cdot x = (I-A)^{-1} \cdot d \Rightarrow x = (I-A)^{-1} \cdot d$$

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα με

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad d = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Άρα το σύστημά μας είναι

$$\left[I_3 - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B}{\parallel} \cdot \underset{x}{\parallel} \quad \underset{d}{\parallel}$$

Θα λύσουμε το σύστημα με τον κανόνα του Cramer.
Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 10 & -0,3 & -0,2 \\ 5 & 0,9 & -0,2 \\ 6 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}} = \ldots = 24,84$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0,8 & 10 & -0,2 \\ -0,4 & 5 & -0,2 \\ -0,1 & 6 & 0,8 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}} = \ldots = 20,68$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & 10 \\ -0,4 & 0,9 & 5 \\ -0,1 & -0,3 & 6 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}} = \ldots = 18,36$$

Κανόνας του Cramer - Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι εάν $\underset{n\times n}{A}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο αντίστροφός του A^{-1} θα είναι ίσος με

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

Όπου adj A είναι ο προσαρτημένος πίνακας του A που είναι ίσος με

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \cdots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det A_{1n} & (-1)^{2+n}\det A_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα $|C_{ij}|$ τέτοια ώστε

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}\det A_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Τότε ο adj A μπορεί να γραφτεί ως

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{nn}| \end{bmatrix}$$

Έστω ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων και n αγνώστων το οποίο γράφεται ως

$$\underset{n\times n}{A}\;\underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{d} \quad , \quad A = (a_{ij})_{n\times n} ,$$

Με βάση τα παραπάνω η λύση του συστήματος μπορεί να γραφτεί ως (εφόσον ο A αντιστρέφεται)

$$A^{-1} \cdot A x = A^{-1} d \quad \acute{\eta}$$

$$x = A^{-1} d \quad \acute{\eta}$$

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \cdot d \qquad (\Phi.4.1)$$

Σχετικά με το δεύτερο μέλος της σχέσης (Φ.4.1) έχουμε

$$\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \cdot d = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & & & \vdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{nn}| \end{bmatrix}}_{\operatorname{adj} A} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_{d}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d_1 |C_{11}| + d_2 |C_{21}| + \dots + d_n |C_{n1}| \\ d_1 |C_{12}| + d_2 |C_{22}| + \dots + d_n |C_{n2}| \\ \vdots \\ d_1 |C_{1n}| + d_2 |C_{2n}| + \dots + d_n |C_{nn}| \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{i1}| \\ \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{i2}| \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{in}| \end{bmatrix}$$

Απο την σχέση (Φ.4.1) θα πρέπει να έχουμε

$$x \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{i1}| \\ \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{i2}| \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{in}| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{i1}| \\ \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{i2}| \\ \vdots \\ \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{in}| \end{bmatrix}$$

Οπότε απο την ισότητα διανυσμάτων θα πρέπει να έχουμε

$$x_j^* = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i |C_{ij}| \qquad \forall j = 1, \dots, n \qquad (Φ\,4.2)$$

Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Laplace ~~είναι~~ ως προς τη j-στήλη είναι

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |C_{ij}| \qquad (Φ.4.3)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις Φ4.2 και Φ4.3 παρατηρούμε ότι το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} d_i |C_{ij}|$ που εμφανίζεται στην Φ.4.2 είναι η ορίζουσα του πίνακα

$$A_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & d_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & d_n & & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{j-στήλη} \end{array}$$

δηλαδη είναι η ορίζουσα του πινακα A_j που προκύπτει εαν αντικαταστήσουμε την j-στήλη με το διάνυσμα των σταθερών όρων d.

Οπότε η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=d$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_1$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \det A_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A} \cdot \det A_n$$