Ορισμός Φ.3.1: Εστω V ενας διανυσματικός χώρος επι του $\mathbb{F}$ διαστασης ν, $\hat{B} = (w_1, w_2, \dots, w_\nu)$ μια διατεταγμενη βάση του V και $v \in V$ τέτοιο ώστε

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_\nu w_\nu$$

Τότε η απεικόνιση $[\ ]_{\hat{B}} : V \to \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ονομάζεται απεικόνιση συντεταγμένων (ή συνάρτηση συντεταγμένων) ως προς $\hat{B}$ και αντιστοιχει ένα διάνυσμα του V σε ένα διανυσμα στήλη ($\mathbb{F}^{\nu \times 1}$) ως ακολούθως

$$[v]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$$

Άσκηση 1: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης και $\hat{B} = (w_1, w_2, \dots, w_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του. Τότε η απεικόνιση $[\,]_{\hat{B}} : V \to \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ είναι ισομορφισμός.
Αποδείξτε

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $[\,]_{\hat{B}}$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή θελουμε να δείξουμε τα ακόλουθα
i) $[\,]_{\hat{B}}$ είναι γραμμική
ii) $[\,]_{\hat{B}}$ είναι 1-1
iii) $[\,]_{\hat{B}}$ είναι επί

Έστω $v_1, v_2 \in V$, χρησιμοποιώντας τη βάση $\hat{B} = (w_1, w_2, w_\nu)$ αυτά μπορούν να γραφούν ως

$$v_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_\nu w_\nu \quad \text{και} \quad v_2 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_\nu w_\nu$$

οπου $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, \dots, \nu$

Για να δείξουμε ότι είναι γραμμική θέλουμε να δείξουμε ότι $[v_1 + v_2]_{\hat{B}} = [v_1]_{\hat{B}} + [v_2]_{\hat{B}}$ και $[\lambda v]_{\hat{B}} = \lambda [v]_{\hat{B}}$, $\lambda \in \mathbb{F}$

Έχουμε $[v_1]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ και $[v_2]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_\nu \end{pmatrix}$

Επίσης έχουμε $v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \mu_1) w_1 + \dots + (\lambda_\nu + \mu_\nu) w_\nu$
Άρα

$$[v_1 + v_2]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu + \mu_\nu \end{pmatrix}. \text{ Άρα } [v_1 + v_2]_{\hat{B}} = [v_1]_{\hat{B}} + [v_2]_{\hat{B}}$$

Έστω $v = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots \gamma_\nu w_\nu$, $\gamma_i \in \mathbb{F}$ $i = 1, \dots, \nu$
$\lambda v = \lambda \gamma_1 w_1 + \lambda \gamma_2 w_2 + \dots + \lambda \gamma_\nu w_\nu$

$$\lambda [v]_{\hat{B}} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\gamma_1 \\ \lambda\gamma_2 \\ \vdots \\ \lambda\gamma_\nu \end{pmatrix}$$

$$[\lambda v]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda\gamma_1 \\ \lambda\gamma_2 \\ \vdots \\ \lambda\gamma_\nu \end{pmatrix}$$. Άρα $[\lambda v]_{\hat{B}} = \lambda [v]_{\hat{B}}$

Οπότε $[\ ]_{\hat{B}}$ είναι γραμμική

Τώρα θα δείξουμε ότι η $[\ ]_{\hat{B}}$ είναι 1-1. Έστω v_1, v_2 (όπως και πάνω) Θέλουμε να δείξουμε

$$[v_1]_{\hat{B}} = [v_2]_{\hat{B}} \Rightarrow v_1 = v_2 \qquad (1)$$

Αν

$$[v_1]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \\ \mu_\nu \end{pmatrix} = [v_2]_{\hat{B}}$$ τότε πρέπει $\lambda_i = \mu_i,\ i = 1, \dots, \nu$

άρα θα ισχύει και

$$v_1 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \dots + \lambda_\nu \omega_\nu = \mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \dots + \mu_\nu \omega_\nu = v_2$$

οπότε $[\ ]_{\hat{B}}$ είναι 1-1

Τέλος μένει να δείξουμε ότι η $[\ ]_{\hat{B}}$ είναι και επί.

Αν $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ τότε θεωρούμε το στοιχείο $v_1 \in V$ με
$v_1 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \dots + \lambda_\nu \omega_\nu$ ώστε

$$[v_1] = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$$

Άρα η $[\ ]_{\hat{B}}$ είναι και επί
Οπότε η $[\ ]_{\hat{B}}$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 2 Να δείξετε ότι τα διανύσματα
$v_1=(1\ 0\ 1)$ $v_2=(1\ 1\ 0)$ $v_3=(0\ 0\ 1)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$

Λύση

Για να είναι τα v_1,v_2,v_3 βάση του $\mathbb{R}^3$ πρέπει
1) Να είναι γραμμικά ανεξάρτητα
2) Να παράγουν τον χώρο (δηλαδή οποιοδήποτε διάνυσμα $w\in\mathbb{R}^3$ να μπορεί να γραφτεί ως $w=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3$ για $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$)

1 Γραμμική ανεξαρτησία

Για τα v_1,v_2,v_3 θέλουμε

$$0_{\mathbb{R}^3}=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Αντικαθιστώντας τα v_1,v_2,v_3 έχουμε

$$\begin{aligned}(0\ 0\ 0) &= \lambda_1(1\ 0\ 1)+\lambda_2(1\ 1\ 0)+\lambda_3(0\ 0\ 1)\\ &=(\lambda_1\ 0\ \lambda_1)+(\lambda_2\ \lambda_2\ 0)+(0\ 0\ \lambda_3)\\ &=(\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_2,\ \lambda_1+\lambda_3)\end{aligned}$$

Προκύπτει το ακόλουθο σύστημα

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2&=0\\ \lambda_2&=0\\ \lambda_1+\lambda_3&=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\lambda_1+0&=0\\ \lambda_2&=0\\ \lambda_1+\lambda_3&=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\lambda_1&=0\\ \lambda_2&=0\\ \lambda_3&=0\end{aligned}$$

Άρα τα $v_1v_2v_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

2 Παράγουν τον $\mathbb{R}^3$

Για να δείξουμε ότι παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ πρέπει να δείξουμε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφει ως γραμμικος συνδιασμος των $v_1 v_2 v_3$ δηλαδη ως

$$x = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3$$

Εστω $x = (x_1\ x_2\ x_3)$ τότε απο την πανω σχέση

$$\begin{aligned}(x_1\ x_2\ x_3) &= \mu_1(1\ 0\ 1) + \mu_2(1\ 1\ 0) + \mu_3(0\ 0\ 1)\\ &= (\mu_1\ 0\ \mu_1) + (\mu_2\ \mu_2\ 0) + (0\ 0\ \mu_3)\\ &= (\mu_1+\mu_2,\ \mu_2,\ \mu_1 + \mu_3)\end{aligned}$$

Αρα προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mu_1+\mu_2\\ x_2 &= \mu_2\\ x_3 &= \mu_1 + \mu_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \mu_1 + x_2\\ \mu_2 &= x_2\\ x_3 &= \mu_1 + \mu_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \mu_1 &= x_1 - x_2\\ \mu_2 &= x_2\\ \mu_3 &= x_3 + x_2 - x_1 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = x_1 - x_2$$

Άσκηση 3 Έστω η βάση $\hat{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ με $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ και $e_3 = (0,0,1)$ και η βάση $\hat{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ με $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1\ 0\ 1)$ και $a_3 = (0\ 0\ 1)$. Να δείξετε ότι η $\hat{a}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την $\hat{e}$ στην $\hat{a}$

Λύση

Για να δείξουμε ότι η $\hat{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ πρέπει να δείξουμε ότι τα a_1, a_2, a_3

i) είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii) παράγουν το $\mathbb{R}^3$

i) Για την γραμμική ανεξαρτησία έχουμε

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ με $\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ή

$\lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,0,1) + \lambda_3 (0,0,1) = (0,0,0)$

$(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (0, 0, \lambda_3) = (0,0,0)$

$(\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$

Άρα προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$$

Εφόσον $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ τα διανύσματα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii) Για να δείξουμε ότι τα $a_1 a_2, a_3$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ επιλέγουμε ένα τυχαίο $v \in \mathbb{R}^3$ με $v = (v_1, v_2, v_3)$

Θα γράψουμε το v ως γραμμικό συνδιασμό των a_1, a_2, a_3

$$v = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 \quad \text{με } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$$
$$(v_1, v_2, v_3) = \mu_1(1,1,1) + \mu_2(1,0,1) + \mu_3(0,0,1)$$
$$(v_1, v_2, v_3) = (\mu_1, \mu_1, \mu_1) + (\mu_2, 0, \mu_2) + (0, 0, \mu_3)$$
$$(v_1, v_2, v_3) = (\mu_1 + \mu_2, \mu_1, \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$$

Άρα προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \mu_1 + \mu_2 \\ v_2 = \mu_1 \\ v_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \mu_1 = v_2 \\ \mu_2 = v_1 - v_2 \\ \mu_3 = v_3 - v_2 - (v_1 - v_2) = v_3 - v_1 \end{array}$$

Για οποιαδήποτε $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα. Άρα a_1, a_2, a_3 παράγουν τον $\mathbb{R}^3$

Άρα δείξαμε ότι το $\hat{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Τώρα θέλουμε να βρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη βαση $\hat{e}$ στη βάση $\hat{a}$, ο οποίος συμβολίζεται ως $(1_{\mathbb{R}^3} \mid \hat{e}, \hat{a})$

Εστω $Q = (1_{\mathbb{R}^3} \mid \hat{e}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$

Για να βρούμε τον Q θα γράψουμε όλα τα e_i σαν γραμμικό συνδιασμό των a_i $i=1,2,3$ και θα λύσουμε τα συστηματα ως προς τους συντελεστες.

e_1 $\quad 1_{\mathbb{R}^3}(e_1) = 1_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) = (1,0,0) = q_{11}a_1 + q_{21}a_2 + q_{31}a_3$

$$= q_{11}(1,1,1) + q_{21}(1\ 0\ 1) + q_{31}(0,0,1) \quad \text{ή}$$

$(1,0,0) = (q_{11}+q_{21},\ q_{11},\ q_{11}+q_{21}+q_{31})$

Προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} q_{11} + q_{21} &= 1 \\ q_{11} &= 0 \\ q_{11} + q_{21} + q_{31} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad q_{11}=0,\ q_{21}=1,\ q_{31}=-1$$

e_2 $\quad 1_{\mathbb{R}^3}(e_2) = 1_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) = (0,1,0) = q_{12}a_1 + q_{22}a_2 + q_{32}a_3$ ή

$(0,1,0) = (q_{12}+q_{22},\ q_{12},\ q_{12}+q_{22}+q_{32})$

Προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} q_{12} + q_{22} &= 0 \\ q_{12} &= 1 \\ q_{12} + q_{22} + q_{32} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad q_{12}=1,\ q_{22}=-1,\ q_{32}=0$$

e_3 $\quad 1_{\mathbb{R}^3}(e_3) = 1_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) = q_{13}a_1 + q_{23}a_2 + q_{33}a_3$

$(0,0,1) = (q_{13} + q_{23},\ q_{13},\ q_{13} + q_{23} + q_{33})$

Προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} q_{13} + q_{23} &= 0 \\ q_{13} &= 0 \\ q_{13} + q_{23} + q_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad q_{13} = 0,\ q_{23} = 0,\ q_{33} = 1$$

Άρα ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι

$$(1_{\mathbb{R}^3} \mid \hat{e}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ασκηση 4 Εστω δυο διανυσματικοί χώροι X, Y, Z επι $\mathbb{F}$ και $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ δυο γραμμικες απεικονισεις Να δείξετε ότι η απεικόνιση $T: Y \to Z$ που ορίζεται ως

$$T(x) = \eta f(x) + \gamma g(x)$$

είναι γραμμική

Λύση

Εφόσον f, g είναι γραμμικές γνωρίζουμε ότι

$$f(ax+\beta y) = af(x) + \beta f(y) \qquad x, y \in X, \ a\beta \in \mathbb{F}$$
$$g(ax+\beta y) = ag(x) + \beta g(y) \qquad -//-$$

Για να δείξουμε ότι η T είναι γραμμική πρέπει να αποδείξουμε

$$T(ax+\beta y) = aT(x) + \beta T(y) \qquad x, y \in X, \ a, \beta \in \mathbb{F}$$

Απο τον ορισμο της T έχουμε

$$\begin{aligned} T(ax+\beta y) &= \eta f(ax+\beta y) + \gamma g(ax+\beta y) \\ &= \eta[af(x) + \beta f(y)] + \gamma[ag(x) + \beta g(y)] \\ &= \eta a f(x) + \eta \beta f(y) + \gamma a g(x) + \gamma \beta g(y) \\ &= a[\eta f(x) + \gamma g(x)] + \beta[\eta f(y) + \gamma g(y)] \\ &= aT(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$