

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Φυλλάδιο 1****Άσκηση 1.1**

Θεωρήστε τις ακόλουθες μήτρες (πίνακες):

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -8 \\ 2 & 5 & 4 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Ποιο είναι το **μέγεθος (τύπος)** του κάθε πίνακα; Ποιοι πίνακες είναι **τετραγωνικοί**; Ποιοι είναι οι **ανάστροφοι** του κάθε πίνακα;

(β) Να κάνετε τις πράξεις:  $2A$ ,  $B+C$ ,  $E+F$ .

(γ) Να υπολογίσετε τους πίνακες:  $BC$ ,  $CB$ . Τι παρατηρείτε;

(δ) Μεταξύ των πινάκων  $D$  και  $E$ , με ποια σειρά μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός;

(ε) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $BK$  και  $KB$ . Τι παρατηρείτε;

(στ) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $CM$  και  $MC$ . Τι παρατηρείτε;

(ζ) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $B^2$ ,  $E^2$ ,  $G^{2024}$ ,  $N^{2024}$ .

(η) Να κάνετε τις πράξεις:  $A'A$ ,  $AA'$ ,  $B'B$ ,  $BB'$ ,  $Q'Q$  και  $QQ'$ .

(θ) Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα κάθε μήτρας.

**Άσκηση 1.2**

Θεωρήστε τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

(α) Τι θα πρέπει να ισχύει προκειμένου οι παραπάνω μήτρες να είναι **μη-ιδιάζουσες** (*non singular*);

(β) Από τις μη-ιδιάζουσες μήτρες να υπολογίσετε τις αντίστροφές τους με τη μέθοδο της **προσαρτημένης μήτρας** (*adjoint matrix*).

(γ) Από τις μη-ιδιάζουσες μήτρες να υπολογίσετε τις αντίστροφές τους με τη μέθοδο των **Gauss-Jordan**.

### Άσκηση 1.3

Το σύστημα προέρχεται από το βιβλίο του Alpha C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, Inc.

Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$6x + 3y + z = 22$$

$$x + 4y - 2z = 12$$

$$4x - y + 5z = 10$$

(α) Πότε ένα γραμμικό σύστημα είναι **συμβιβαστό** (έχει πραγματικές λύσεις) και πότε **αδύνατο**;

(β) Να εκφράσετε το πρόβλημα σε όρους πινάκων και να το λύσετε με τη χρήση του αντίστροφου πίνακα.

(γ) Να λυθεί το πρόβλημα με τον κανόνα του **Cramer**.

(δ) Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο **Gauss-Jordan**.

(ε) Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο **Gauss**.

### Άσκηση 1.4

Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό ομογενές σύστημα:

$$6x + 3y + z = 0$$

$$x + 4y - 2z = 0$$

$$4x - y + 5z = 0$$

(α) Πότε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα έχει μοναδική (τη μηδενική) λύση και πότε άπειρες;

(β) Να ελέγξετε αν το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

### Άσκηση 1.5

Μια τετραγωνική συνάρτηση κόστους διέρχεται από τα σημεία  $P_0 = (1,132)$ ,  $P_1 = (2,168)$  και  $P_3 = (3,208)$ .

Να προσδιορίσετε την εξίσωση της συνάρτησης κόστους.

### Άσκηση 1.6

Μια τράπεζα σχεδιάζει μια πιστωτική εκστρατεία συνολικού ύψους 25 εκατομμυρίων νομισματικών μονάδων. Ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

Είδος πίστωσης	Επιτόκιο	Κίνδυνος
Προσωπικά δάνεια	0,14	0,12
Δάνεια αυτοκινήτου	0,14	0,10
Στεγαστικά δάνεια	0,06	0,02

Επιπλέον, το ύψος των προσωπικών δανείων πρέπει να είναι ακριβώς διπλάσιο από το ύψος των δανείων για αγορά αυτοκινήτου. Αν η τράπεζα υπολογίζει συνολικό πιστωτικό κίνδυνο 5%, πώς πρέπει να κατανεμηθούν τα διαθέσιμα κεφάλαια μεταξύ

των τριών ειδών πίστωσης; Ποιο ετήσιο εισόδημα από τόκους αναμένεται από αυτή την κατανομή;

### Άσκηση 1.7

Θεωρήστε μια οικονομία με τρεις τομείς: **Χημικά και Μέταλλα**, **Καύσιμα και Ενέργεια** και **Μηχανήματα**. Ο τομέας των Χημικών διαθέτει το 30% της παραγωγής του στον τομέα Καυσίμων και Ενέργειας και το 50% στον τομέα Μηχανημάτων, ενώ κρατά το υπόλοιπο για τον εαυτό του. Ο τομέας Καυσίμων και Ενέργειας διαθέτει το 80% της παραγωγής του στον τομέα Χημικών και το 10% στον τομέα Μηχανημάτων, ενώ κρατά το υπόλοιπο για τον εαυτό του. Ο τομέας Μηχανημάτων διαθέτει το 40% της παραγωγής του στον τομέα Χημικών, το 40% στον τομέα Καυσίμων και Ενέργειας και κρατά το υπόλοιπο για τον εαυτό του.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα ανταλλαγών για αυτή την οικονομία.

β) Να διαμορφώσετε ένα σύστημα εξισώσεων που να οδηγεί στις τιμές για τις οποίες το εισόδημα κάθε τομέα ισούται με τις δαπάνες του. Στη συνέχεια, να γράψετε τον επαυξημένο πίνακα που μπορεί να αναχθεί κλιμακωτά για να βρεθούν αυτές οι τιμές.