

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Α. Διανυσματικοί χώροι, βάση, διάσταση, τομή και άθροισμα χώρων

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 4, 2), v_3 = (1, 0, 1), v_4 = (0, 2, 0).$$

Να εξετάσετε αν το σύνολο

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο ή γραμμικά εξαρτημένο.

Στη συνέχεια, να βρείτε μία βάση του χώρου που παράγεται από τα παραπάνω διανύσματα και τη διάστασή του.

Άσκηση 2

Δίνεται ο διανυσματικός χώρος

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

- Να δείξετε ότι ο W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
- Να βρείτε μία βάση του W και τη διάστασή του.

Άσκηση 3

Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

$$U = \text{span} \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

και

$$V = \text{span} \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}.$$

Να βρείτε:

- α. μία βάση και τη διάσταση του U ,
- β. μία βάση και τη διάσταση του V ,
- γ. μία βάση και τη διάσταση του $U + V$,
- δ. μία βάση και τη διάσταση του $U \cap V$.

Άσκηση 4

Δίνεται ο υπόχωρος

$$W = \text{span} \{(1,2,0,1), (2,4,0,2), (0,1,1,0), (1,3,1,1)\} \text{ του } \mathbb{R}^4.$$

Να βρείτε μία βάση του W και τη διάστασή του.

Άσκηση 5

Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

και

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}.$$

Να βρείτε βάση και διάσταση για τους χώρους U , V , $U + V$ και $U \cap V$.

B. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και μήτρες

Άσκηση 6

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

με οποιαδήποτε μέθοδο έχετε διδαχθεί.

Να ελέγξετε το αποτέλεσμα αντικαθιστώντας τη λύση στο αρχικό σύστημα.

Άσκηση 7

Να εξετάσετε, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου a , αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή καμία λύση:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 2 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 8

Μια οικονομία αποτελείται από τρεις κλάδους: γεωργία, βιομηχανία και υπηρεσίες. Ο πίνακας τεχνολογικών συντελεστών είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

και η τελική ζήτηση είναι:

$$d = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

- α. Να γράψετε το σύστημα $(I - A)x = d$.
- β. Να λύσετε το σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο.

Γ. Τετραγωνικές μορφές και παραγωγή πινάκων

Άσκηση 9

Έστω

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

και

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να γραφεί αναλυτικά η τετραγωνική μορφή:

$$q = x^T A x.$$

Να βρεθεί:

$$\frac{\partial q}{\partial x}$$

και ο πίνακας δεύτερων μερικών παραγώγων.

Άσκηση 10

Έστω

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή:

$$q = x^T A x.$$

Να υπολογίσετε:

- α. την αναλυτική μορφή του q ,
- β. το διάνυσμα πρώτων μερικών παραγώγων,
- γ. τον Hessian πίνακα

Άσκηση 11

Έστω

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε:

$$\frac{\partial b^T x}{\partial x}, \frac{\partial x^T b}{\partial x}, \frac{\partial x^T x}{\partial x}.$$

Να εξηγήσετε γιατί $b^T x$ και $x^T b$ έχουν την ίδια παράγωγο ως προς x .

Δ. Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και διαγωνοποίηση

Άσκηση 12

Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .

Να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα A , δηλαδή να βρείτε πίνακες P και D , τέτοιους ώστε:

$$A = PDP^{-1}.$$

Να υπολογίσετε το A^t .

Άσκηση 13

Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- α. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .
- β. Να εξετάσετε αν ο πίνακας διαγωνοποιείται.
- γ. Αν διαγωνοποιείται, να βρείτε τους πίνακες P , D και P^{-1} .

Άσκηση 14

Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- α. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A .
- β. Να εξετάσετε αν ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 15

Δίνεται το δυναμικό σύστημα:

$$X_{t+1} = AX_t,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

και

$$X_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- α. Να λύσετε το σύστημα με χρήση διαγωνοποίησης.

β. Να βρείτε ρητά το X_t .

Ε. Ομογενή συστήματα εξισώσεων διαφορών

Άσκηση 16

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t + 3y_t \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες:

$$x_0 = 2, y_0 = 0.$$

Να γραφεί σε μορφή:

$$X_{t+1} = AX_t.$$

Να λυθεί με διαγωνοποίηση του πίνακα A .

Άσκηση 17

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t + 2y_t \\ z_{t+1} = x_t + 4z_t \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες:

$$x_0 = 5, y_0 = -1, z_0 = 0.$$

Να βρείτε τους πίνακες P , D , P^{-1} και να χρησιμοποιήσετε τη σχέση:

$$X_t = A^t X_0 = P D^t P^{-1} X_0.$$

ΣΤ. Εξισώσεις διαφορών με οικονομικές εφαρμογές, διάγραμμα και σταθερότητα

Άσκηση 18

Η τιμή ενός προϊόντος σε μια αγορά ακολουθεί τη σχέση:

$$p_{t+1} = 0.6p_t + 20.$$

Η αρχική τιμή είναι:

$$p_0 = 10.$$

- α. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης διαφορών.
- β. Να βρείτε τη μακροχρόνια τιμή ισορροπίας.
- γ. Να εξετάσετε αν η δυναμική είναι σταθερή ή ασταθής.
- δ. Να κατασκευάσετε διάγραμμα της p_t για $t = 0, 1, \dots, 10$.
- ε. Να ερμηνεύσετε οικονομικά το αποτέλεσμα.

Άσκηση 19

Το απόθεμα κεφαλαίου μιας επιχείρησης εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$K_{t+1} = 0.8K_t + 30.$$

Η αρχική τιμή είναι:

$$K_0 = 50.$$

- α. Να βρείτε τη λύση K_t .
- β. Να βρείτε το επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας του κεφαλαίου.
- γ. Να εξετάσετε τη σταθερότητα της λύσης.
- δ. Να κάνετε διάγραμμα της πορείας του K_t .
- ε. Να εξηγήσετε τι σημαίνει οικονομικά η σύγκλιση ή μη προς το επίπεδο ισορροπίας.

Άσκηση 20

Το δημόσιο χρέος ως ποσοστό του ΑΕΠ ακολουθεί την εξίσωση:

$$b_{t+1} = 1.05b_t - 3.$$

Η αρχική τιμή είναι:

$$b_0 = 100.$$

- α. Να λύσετε την εξίσωση διαφορών.
- β. Να βρείτε τη σταθερή κατάσταση b^* .
- γ. Να εξετάσετε αν η σταθερή κατάσταση είναι σταθερή ή ασταθής.
- δ. Να κατασκευάσετε διάγραμμα για $t = 0, 1, \dots, 10$.
- ε. Να σχολιάσετε οικονομικά αν το χρέος τείνει να συγκλίνει ή να απομακρύνεται από τη μακροχρόνια ισορροπία.

Άσκηση 21

Η προσφορά ενός αγροτικού προϊόντος εξαρτάται από την τιμή της προηγούμενης περιόδου:

$$Q_t^s = -10 + 2p_{t-1}.$$

Η ζήτηση είναι:

$$Q_t^d = 50 - p_t.$$

Σε κάθε περίοδο η αγορά εκκαθαρίζει, δηλαδή:

$$Q_t^s = Q_t^d.$$

- α. Να βρείτε την εξίσωση διαφορών που περιγράφει την τιμή p_t .
- β. Αν $p_0 = 15$, να βρείτε τη λύση p_t .
- γ. Να βρείτε την τιμή ισορροπίας.
- δ. Να εξετάσετε αν η ισορροπία είναι σταθερή ή ασταθής.
- ε. Να κατασκευάσετε διάγραμμα της p_t για $t = 0, 1, \dots, 10$.
- στ. Να δώσετε οικονομική ερμηνεία του αποτελέσματος.

Άσκηση 22

Το εισόδημα μιας οικονομίας εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y_{t+1} = 0.75Y_t + 40.$$

Η αρχική τιμή του εισοδήματος είναι:

$$Y_0 = 80.$$

- α. Να λύσετε την εξίσωση διαφορών.
- β. Να βρείτε το επίπεδο εισοδήματος μακροχρόνιας ισορροπίας.

- γ. Να εξετάσετε αν το εισόδημα συγκλίνει προς την ισορροπία.
- δ. Να κατασκευάσετε διάγραμμα της Y_t .
- ε. Να σχολιάσετε οικονομικά τη δυναμική που προκύπτει.

Άσκηση 23

Μια μεταβλητή κόστους C_t εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$C_{t+1} - 2C_t = t^2 + 2t.$$

Η αρχική τιμή είναι:

$$C_0 = 1.$$

- α. Να βρείτε τη γενική λύση.
- β. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο guess για τη μερική λύση.
- γ. Να σχεδιάσετε τη συμπεριφορά της C_t για $t = 0, 1, \dots, 10$.
- δ. Να σχολιάσετε αν η πορεία της μεταβλητής είναι σταθερή ή ασταθής.

Άσκηση 24

Η παραγωγή Y_t μιας οικονομίας ακολουθεί την εξίσωση:

$$Y_{t+2} - 5Y_{t+1} + 6Y_t = 3 \cdot 2^t.$$

Δίνονται:

$$Y_0 = 1, Y_1 = 4.$$

- α. Να λυθεί η εξίσωση.
- β. Να αιτιολογηθεί η μορφή της μερικής λύσης.
- γ. Να εξετάσετε αν η λύση είναι σταθερή ή ασταθής.
- δ. Να σχεδιάσετε την πορεία της Y_t για $t = 0, 1, \dots, 10$.
- ε. Να σχολιάσετε οικονομικά την πορεία της παραγωγής.

Άσκηση 25

Η μεταβλητή I_t , που εκφράζει τις επενδύσεις μιας οικονομίας, ικανοποιεί:

$$I_{t+2} - 4I_{t+1} + 3I_t = 10.$$

Με αρχικές συνθήκες:

$$I_0 = 0, I_1 = 5.$$

- α. Να λυθεί η εξίσωση.
- β. Να βρείτε τη μακροχρόνια συμπεριφορά της I_t .
- γ. Να εξετάσετε αν η πορεία είναι σταθερή ή ασταθής.
- δ. Να κάνετε διάγραμμα για $t = 0, 1, \dots, 10$.

Ζ. Διαφορικές εξισώσεις

Άσκηση 26

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y'(t) + 2y(t) = 4.$$

με αρχική συνθήκη:

$$y(0) = 1.$$

Να βρείτε τη μακροχρόνια τιμή της $y(t)$.

Άσκηση 27

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y'(t) + y(t) = t + 2.$$

με αρχική συνθήκη:

$$y(0) = 3.$$

Να σχολιάσετε τη συμπεριφορά της λύσης καθώς $t \rightarrow \infty$.

Άσκηση 28

Το απόθεμα κεφαλαίου μιας οικονομίας εξελίσσεται σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση:

$$K'(t) = 20 - 0.1K(t).$$

Η αρχική τιμή του κεφαλαίου είναι:

$$K(0) = 100.$$

- α. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση.
- β. Να βρείτε το επίπεδο μακροχρόνιας ισορροπίας.
- γ. Να εξετάσετε αν η λύση είναι σταθερή.
- δ. Να κάνετε πρόχειρο διάγραμμα της πορείας του $K(t)$.
- ε. Να δώσετε οικονομική ερμηνεία.

Άσκηση 29

Η τιμή $p(t)$ ενός προϊόντος προσαρμόζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$p'(t) = 30 - 2p(t).$$

Αρχικά:

$$p(0) = 5.$$

- α. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση.
- β. Να βρείτε τη μακροχρόνια τιμή της τιμής.
- γ. Να εξετάσετε τη σταθερότητα.