

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Φυλλάδιο 1****Άσκηση 1.1**

Θεωρήστε τις ακόλουθες μήτρες (πίνακες):

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -8 \\ 2 & 5 & 4 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Ποιο είναι το **μέγεθος (τύπος)** του κάθε πίνακα; Ποιοι πίνακες είναι **τετραγωνικοί**; Ποιοι είναι οι **ανάστροφοι** του κάθε πίνακα;

(β) Να κάνετε τις πράξεις: $2A$, $B+C$, $E+F$.

(γ) Να υπολογίσετε τους πίνακες: BC , CB . Τι παρατηρείτε;

(δ) Μεταξύ των πινάκων D και E , με ποια σειρά μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός;

(ε) Να υπολογίσετε τους πίνακες BK και KB . Τι παρατηρείτε;

(στ) Να υπολογίσετε τους πίνακες CM και MC . Τι παρατηρείτε;

(ζ) Να υπολογίσετε τους πίνακες B^2 , E^2 , G^{2024} , N^{2024} .

(η) Να κάνετε τις πράξεις: $A'A$, AA' , $B'B$, BB' , $Q'Q$ και QQ' .

(θ) Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα κάθε μήτρας.

Άσκηση 1.2

Θεωρήστε τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

(α) Τι θα πρέπει να ισχύει προκειμένου οι παραπάνω μήτρες να είναι **μη-ιδιάζουσες** (*non singular*);

(β) Από τις μη-ιδιάζουσες μήτρες να υπολογίσετε τις αντίστροφές τους με τη μέθοδο της **προσαρτημένης μήτρας** (*adjoint matrix*).

(γ) Από τις μη-ιδιάζουσες μήτρες να υπολογίσετε τις αντίστροφές τους με τη μέθοδο των **Gauss-Jordan**.

Άσκηση 1.3

Το σύστημα προέρχεται από το βιβλίο του Alpha C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3rd Edition, McGraw-Hill, Inc.

Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$6x + 3y + z = 22$$

$$x + 4y - 2z = 12$$

$$4x - y + 5z = 10$$

(α) Πότε ένα γραμμικό σύστημα είναι **συμβιβαστό** (έχει πραγματικές λύσεις) και πότε **αδύνατο**;

(β) Να εκφράσετε το πρόβλημα σε όρους πινάκων και να το λύσετε με τη χρήση του αντίστροφου πίνακα.

(γ) Να λυθεί το πρόβλημα με τον κανόνα του **Cramer**.

(δ) Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο **Gauss-Jordan**.

(ε) Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο **Gauss**.

Άσκηση 1.4

Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό ομογενές σύστημα:

$$6x + 3y + z = 0$$

$$x + 4y - 2z = 0$$

$$4x - y + 5z = 0$$

(α) Πότε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα έχει μοναδική (τη μηδενική) λύση και πότε άπειρες;

(β) Να ελέγξετε αν το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Άσκηση 1.5

Δείξτε ότι αν μια ομάδα εξισώσεων $Ax = b$ είναι συμβατή, τότε κάθε λύση της μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας συγκεκριμένης λύσης του $Ax = b$ και μιας λύσης του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Άσκηση 1.6

Μετατρέψτε τους παρακάτω πίνακες σε κλιμακωτή μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$