



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Φυλλάδιο 4

Άσκηση 4.1

Ένας πίνακας A (3×3) είναι γνωστό πως έχει για ιδιοτιμές τις τιμές 0, 1 και 2. Αυτές οι πληροφορίες αρκούν για να βρείτε τα ακόλουθα:

- (α) Το rank του πίνακα A .
- (β) Την ορίζουσα του πίνακα $A^T A$
- (γ) Τις ιδιοτιμές του πίνακα $A^T A$
- (δ) Τις ιδιοτιμές του πίνακα $(A^2 + I)^{-1}$

Άσκηση 4.2

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας, τέτοιος ώστε υπάρχει ο αντίστροφος του. Αποδείξτε ότι αν το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , τότε το $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρόφου του.

Άσκηση 4.3

Υποθέστε ότι λ_1 και λ_2 δύο ξεχωριστές ιδιοτιμές ενός πίνακα A . Κάθε μια από αυτές δίνει ένα ιδιοδιάνυσμα x_1 και x_2 αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός k , τέτοιος ώστε $kx_1 = x_2$.

Άσκηση 4.4

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Αποδείξτε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του, αν και μόνο αν το μηδέν (0) δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .

Άσκηση 4.5

Έστω οι ακόλουθοι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (α) Να προσδιορίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο των πινάκων.
- (β) Να βρείτε τις **ιδιοτιμές** (*eigenvalues*) και τα **ιδιοδιανύσματα** (*eigenvectors*) των παραπάνω μητρών.
- (γ) Να οριστούν οι παραπάνω πίνακες.
- (δ) Να γίνει η διαγωνοποίηση των παραπάνω μητρών.
- (ε) Να υπολογιστούν οι μήτρες: $A^{2024}, B^{2024}, C^{2024}$.