

Τάξη Πίνακα (Rank)

Γραμμική Άλγεβρα — Εισαγωγή

Γραμμική Άλγεβρα

- 1 Ορισμός
- 2 Γραμμική Ανεξαρτησία
- 3 Υπολογισμός Rank
- 4 Ιδιότητες
- 5 Γεωμετρική Ερμηνεία
- 6 Εφαρμογές
- 7 Ανακεφαλαίωση

Τι είναι η Τάξη (Rank) ενός Πίνακα;

Ορισμός

Η **τάξη** (rank) ενός πίνακα A είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών (ή στηλών) του.

$$\text{rank}(A) = r$$

Ισοδύναμοι ορισμοί:

- Αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων **στηλών**
- Διάσταση του **χώρου στηλών**
- Αριθμός **pivot** στοιχείων (μετά από REF)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

Ορισμός

Διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

✓ **Ανεξάρτητα:**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Κανένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

✗ **Εξαρτημένα:**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$ — γραμμικά εξαρτημένα!

Πώς Υπολογίζουμε το Rank;

Χρησιμοποιούμε **Γκαουσιανή Απαλοιφή** (Row Echelon Form):

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{REF}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{pivot} \\ \leftarrow \text{pivot} \\ \leftarrow \text{μηδενική γραμμή} \end{array}$$

$$\text{rank}(A) = 2 \text{ (2 pivot στοιχεία)}$$

Κανόνας

$\text{rank}(A) =$ **αριθμός μη μηδενικών γραμμών** στη REF μορφή

Βασικές Ιδιότητες του Rank

Όρια

Για πίνακα A διαστάσεων $m \times n$:

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

Συμμετρία γραμμών-στηλών

$$\text{rank}_{\text{γραμμών}} = \text{rank}_{\text{στηλών}}$$

(Πάντα ίσα!)

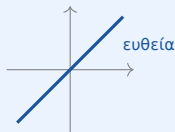
Πλήρης Τάξη (Full Rank)

- $\text{rank}(A) = m$: **πλήρης γραμμικός rank**
- $\text{rank}(A) = n$: **πλήρης στηλικός rank**
- $\text{rank}(A) = m = n$: ο A είναι **αντιστρέψιμος**

Θεώρημα Rank-Nullity

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$$

Rank = 1



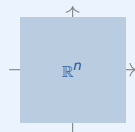
Οι στήλες ορίζουν **ευθεία** στον $\mathbb{R}^n$

Rank = 2



Οι στήλες ορίζουν **επίπεδο** στον $\mathbb{R}^n$

Rank = n



Οι στήλες **καλύπτουν** όλο τον $\mathbb{R}^n$

Το rank μετράει την «πραγματική διάσταση» της εικόνας του πίνακα.

Γραμμικά Συστήματα

Το $Ax = b$ έχει λύση $\Leftrightarrow$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$$

Αντιστρεψιμότητα

Ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$

$$\text{rank}(A) = n$$

SVD & Δεδομένα

Το rank χρησιμοποιείται σε:

- Συμπίεση εικόνων
- PCA
- Μηχανική μάθηση

Σύνδεση με ορίζουσα

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ ο A είναι αντιστρέψιμος

Έννοια	Ορισμός / Σημασία
$\text{rank}(A)$	Αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών/στηλών
Υπολογισμός	Αριθμός pivot στη REF μορφή
Όριο	$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$
Full rank	$\text{rank}(A) = \min(m, n)$
Αντιστρεψιμότητα	$\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
Rank-Nullity	$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$

Ερωτήσεις;

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!