# Εισαγωγή : Βασικές Έννοιες

Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά λέγονται στοιχεία του συνόλου. Για κάθε σύνολο υπάρχει μια σαφής περιγραφή με βάση την οποία μπορούμε να αποφανθούμε κατά πόσο ένα δεδομένο στοιχείο ανήκει ή όχι στο σύνολο αυτό.

Τα σύνολα και τα στοιχεία τους συμβολίζονται με γράμματα. Αν $A$ είναι ένα σύνολο και $a$ ένα στοιχείο του συνόλου αυτού τότε αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως

$$a \in A$$

Ο συμβολισμός $b \notin A$ σημαίνει ότι το στοιχείο $b$ δεν ανήκει στο σύνολο $A$.

Ορισμός 0.1 Δυο σύνολα $A$ και $B$ θα λέγονται ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Ένα σύνολο περιγράφεται ως

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{\text{Ελλάδα}, \text{ΗΠΑ}, \text{Ουκρανία}\}.$$

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής των στοιχείων είναι με αναγραφή ενός μόνο μέρους αυτών που περιγράφει την ιδιότητα που έχουν τα στοιχεία του συνόλου και τα χαρακτηρίζει.

$$\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ένας τρίτος τρόπος είναι με περιγραφή μιας ιδιότητας των στοιχείων του συνόλου, π.χ αν $S$ είναι ένα σύνολο και $P$ μια ιδιότητα το σύνολο

$$\{x \in S \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}$$

παριστά το σύνολο των στοιχείων του $S$ που έχουν την ιδιότητα $P$.

Κάποια στοιχειώδη σύνολα είναι

α) Το σύνολο των φυσικών αριθμών

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

β) Το σύνολο των ακέραιων αριθμών

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

γ) Το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

δ) Το σύνολο των ρητών αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, \ m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

ε) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

στ) Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$

ζ) Το κενό σύνολο $\emptyset$

**Ορισμός 0.2** Έστω $A$ και $B$ δύο σύνολα. Αν κάθε στοιχείο του $A$ είναι στοιχείο και του $B$, τότε το $A$ είναι υποσύνολο του $B$ και γράφουμε

$$A \subseteq B.$$

Αν επιπλέον υπάρχει στοιχείο του $B$ που δεν ανήκει στο $A$, τότε το $A$ λέγεται γνήσιο υποσύνολο του $B$ και γράφουμε

$$A \subset B \quad \text{ή} \quad A \subsetneq B$$

Άμεση συνέπεια του ορισμού του υποσυνόλου είναι ότι δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν

$$A \subseteq B \quad \text{και} \quad B \subseteq A$$

**Παράδειγμα 0.1** α) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ είναι πολλαπλάσιο του $2\}$ είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων αριθμών.

β) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 4x + 1 = 0\} = \left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$

γ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\} = \emptyset$

**Ορισμός 0.3** Ένωση δύο συνόλων $A$ και $B$ ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν στο $A$ ή στο $B$ και συμβολίζεται με

$$A \cup B.$$

Ορισμός 0.4. Τομή δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B και συμβολίζεται με

$$A \cap B.$$

Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να επεκταθούν για περισσότερα από 2 σύνολα:

α) Η τομή ν συνόλων:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_\nu = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$$

β) Η ένωση ν συνόλων

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_\nu = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$$

Επίσης προκύπτει ότι για δύο σύνολα A, B

α) $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$.

β) Αν για κάποιο σύνολο Γ ισχύουν

$A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \cup B \subseteq \Gamma$

γ) Αν τα δύο σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία

$$A \cap B = \emptyset$$

Ορισμός 0.5. Διαφορά ενός συνόλου A από ένα σύνολο B, είναι το σύνολο των στοιχείων του B που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται

$$B \setminus A$$

Παρατήρηση 0.1. Αν το A είναι υποσύνολο του B τότε η διαφορά του A από το B είναι το συμπλήρωμα του A στο B και συμβολίζεται με $A^c$

**Πρόταση 0.1** (Άλγεβρα των συνόλων) Έστω ένα σύνολο $S$ και $A, B, \Gamma$ υποσύνολα αυτού. Τότε ισχύει

α) $A \cup A = A$, και $A \cap A = A$

β) $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$

γ) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ και $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

δ) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ και
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

ε) $A \cap (A \cup B) = A$ και $A \cup (A \cap B) = A$

στ) $A \cup \emptyset = A$ και $A \cap \emptyset = \emptyset$

ζ) $A \cup S = S$ και $A \cap S = A$

η) $A \cup A^c = S$ και $A \cap A^c = \emptyset$

θ) $(A^c)^c = A$

ι) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ και
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Νόμοι του De Morgan)

Για δύο σύνολα $A$ και $B$, το ζεύγος στοιχείων $(a, b)$ με $a \in A$ και $b \in B$ λέγεται διατεταγμένο ζεύγος με πρώτη συντεταγμένη το "$a$" και δεύτερη το "$b$". Για δύο διατεταγμένα ζεύγη $(a, b)$ και $(a', b')$ θα ισχύει

$$(a, b) = (a', b') \text{ αν και μόνο αν } \begin{cases} a = a' \text{ και} \\ b = b' \end{cases}$$

**Ορισμός 0.6** Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων $A$ και $B$, θα ονομάζεται το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη $(a, b)$ τέτοια ώστε $a \in A$ και $b \in B$ και συμβολίζεται με

$$A \times B.$$

**Παράδειγμα 0.2** Έστω τα σύνολα $A=\{1,2\}$ και $B=\{4,5\}$.

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5)\}$$

[Άσκηση Βρείτε τα σύνολα $B\times A$, $A\times A$ και $B\times B$]

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα από δύο σύνολα:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_\nu=\{(a_1,a_2,\ldots,a_\nu)\mid a_i\in A_i,\ 1\le i\le\nu\}.$$

Το στοιχείο $(a_1,a_2,\ldots,a_\nu)$ ονομάζεται διατεταγμένη $\nu$-άδα με $i$-συντεταγμένη το $a_i$, $i=1,\ldots,\nu$

**Παράδειγμα 0.3** Το $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Αντίστοιχα το $\mathbb{R}^\nu$ είναι το σύνολο διατεταγμένων $\nu$-άδων πραγματικών αριθμών ($\nu=1,2,\ldots,$ ή $\nu\in\mathbb{N}$)

**Ορισμός 0.7** Έστω δύο σύνολα A και B. Ως διμελή σχέση από το A στο B ορίζεται ένα υποσύνολο $R$ του καρτεσιανού γινομένου $A\times B$.
Ειδικότερα αν $B=A$ τότε η $R$ λέγεται διμελής σχέση στο A
Για τα στοιχεία $(x,y)\in R$ γράφουμε $xRy$

**Παράδειγμα 0.4.** α) $R=\{(x,y)\in A\times A\mid x=y\}$.

β) $R=\{(x,Y)\in A\times P(A)\mid x\in Y\}$

* Το σύνολο $P(A)$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A και ονομάζεται δυναμοσύνολο του A.

Ορισμός 0.8 Έστω ένα σύνολο $A$ και $R \subseteq A \times A$ μια διμελής σχέση στο $A$

α) Η $R$ λέγεται αυτοπαθής αν

$$(x,x) \in R \quad \forall x \in A$$

β) Η $R$ λέγεται συμμετρική αν ισχύει ότι

$$\text{αν } (x,y) \in R \text{, τότε } (y,x) \in R$$

γ) Η $R$ λέγεται μεταβατική αν ισχύει ότι

$$\text{αν } (x,y) \in R \text{ και } (y,z) \in R \text{ τότε } (x,z) \in R$$

Ορισμός 0.9 Μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο $A$, η οποία είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική λέγεται σχέση ισοδυναμίας στο $A$.

Για τις σχέσεις ισοδυναμίας αντί για $xRy$ γράφουμε $x \sim y$

Παράδειγμα 0.5 α) Έστω $A$ ένα σύνολο. Η ισότητα στο $A$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A$

β) Η σχέση $X \subseteq Y$ στο $P(A)$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας στο $P(A)$ αφού δεν είναι συμμετρική

γ) Στο $\mathbb{Z}$ η σχέση:
για $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$ αν και μόνο αν ο ακέραιος $a-b$ είναι άρτιος <u>είναι</u> σχέση ισοδυναμίας

Ορισμός 0.10 Έστω $X, Y$ δύο σύνολα. Μια απεικόνιση $f$ από το $X$ στο $Y$ είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο $x \in X$ ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ στο $Y$. Συμβολίζουμε

$$f: X \to Y$$

Το σύνολο $X$ λέγεται πεδίο ορισμού της απεικόνισης $f$, ενώ το $Y$ πεδίο τιμών της απεικόνισης $f$. Τέλος το στοιχείο $f(x)$ λέγεται εικόνα του $x$ μέσω της απεικόνισης $f$.

Για μια απεικόνιση $f: X \to Y$, και σύνολα $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, το σύνολο $\{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ λέγεται εικόνα του $A$ μέσω της $f$ και συμβολίζεται με $f(A)$. Ειδικότερα το $f(X)$ λέγεται εικόνα της $f$.
Το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) \in B\}$ λέγεται αντίστροφη εικόνα του $B$ μέσω της $f$ και συμβολίζεται με $f^{-1}(B)$

Παράδειγμα 0.6.

α) Η πρόσθεση των πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση:

$$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } (x,y) \to x+y.$$

β) Ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση

$$\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } (x,y) \to xy$$

Παρατήρηση 0.2

Μια απεικόνιση δεν ορίζεται κατ' ανάγκη μέσω κάποιου τύπου

Ορισμός 0.11

Δυο απεικονίσεις $f: X \to Y$ και $g: A \to B$ λέγονται ίσες αν $X = A$, $Y = B$ και $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$

Ορισμός 0.12 α) Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ θα λέγεται ένα προς ένα (1-1), αν η σχέση $f(x) = f(x')$ συνεπάγεται ότι $x = x'$. Ισοδύναμα, αν η σχέση $x \neq x'$ συνεπάγεται ότι $f(x) \neq f(x')$

β) Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ θα λέγεται επί, αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = y$. Ισοδύναμα αν $f(X) = Y$

Για ένα συνολο $X$ η απεικόνιση $X \to X$ με $x \mapsto x$ λέγεται ταυτοτική και συμβολίζεται με $1_X$ ή $id_X$

Ορισμός 0.13 Εστω $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ δυο απεικονίσεις. Τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$g \circ f : X \to Z \quad ως \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

και ονομάζεται σύνθεση των $f$ και $g$.

Παράδειγμα 0.7 Εστω $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto 2\nu + 1$ και $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto 2\nu$

Τότε η $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ορίζεται ως

$$\nu \longmapsto 2(2\nu + 1) = 4\nu + 2$$

και η $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ορίζεται ως

$$\nu \longmapsto 2(2\nu) + 1 = 4\nu + 1$$

Προφανώς $g \circ f \neq f \circ g$

**Πρόταση 0.2** Έστω μια απεικόνιση $f: A \to B$. Τότε ισχύει

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

**Πρόταση 0.3** (Προσεταιριστική Ιδιότητα της σύνθεσης απεικονίσεων)
Έστω οι απεικονίσεις $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ και $h: \Gamma \to \Delta$. Οι απεικονίσεις $h \circ (g \circ f)$ και $(h \circ g) \circ f$ είναι ίσες.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\varphi = h \circ (g \circ f): A \to \Delta$ και $\psi: (h \circ g) \circ f: A \to \Delta$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\varphi(a) = (h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

Παρόμοια για $a \in A$ θα ισχύει

$$\psi(a) = ((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

Συνεπώς $\varphi(a) = \psi(a) \ \forall a \in A \Rightarrow \varphi = \psi$.

**Πρόταση 0.4** Έστω δύο απεικονίσεις $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$

α) Αν οι $f, g$ είναι 1-1, τότε και η $g \circ f$ είναι 1-1

β) Αν οι $f, g$ είναι επί, τότε και η $g \circ f$ είναι επί

γ) Αν οι $f, g$ είναι 1-1 και επί, τότε και η $g \circ f$ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη: (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή η $f$ είναι 1-1, ισχύει ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Επειδή και η $g$ είναι 1-1, τότε $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1.

(β) Έστω $z \in Z$. Αφού η $g$ είναι επί, συνεπάγεται ότι υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $z = g(y)$. Επειδή και η $f$ είναι επί υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Όμως $z = g(y) = g(f(x))$. Συνεπώς για κάθε $z \in Z$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $z = (g \circ f)(x)$. Άρα η $g \circ f$ είναι επί.

(γ) Άμεση συνέπεια των (α) και (β)

Για δύο απεικονίσεις $f: A \to B$ και $g: B \to A$ θα ισχύει

$$g \circ f : A \to A \quad \text{και}$$
$$f \circ g : B \to B$$

Ειδικά αν $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$ τότε η $g$ λέγεται αντίστροφη της $f$ (αντίστοιχα η $f$ λέγεται αντίστροφη της $g$)

Παρατήρηση 0.3 Αν υπάρχει η αντίστροφη μιας απεικόνισης τότε αυτή είναι μοναδική.

Πρόταση 0.5 Μια απεικόνιση $f: A \to B$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν η $f$ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη Έστω ότι η $f$ έχει μια αντίστροφη $g: B \to A$. Θα ισχύει $g(f(a)) = a$ για κάθε $a \in A$ και $f(g(b)) = b$ για κάθε $b \in B$. Έστω $a_1$ και $a_2 \in A$ με $f(a_1) = f(a_2)$

Τότε $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Όμως $g(f(a_1)) = a_1$ και $g(f(a_2)) = a_2$. Συνεπώς $a_1 = a_2$ και η $f$ είναι 1-1.

Έστω $b \in B$. Τότε $f(g(b)) = b$, δηλαδή το $b$ είναι η εικόνα του στοιχείου $g(b)$ του $A$ μέσω της $f$. Άρα η $f$ είναι επί.

(Αντιστρόφως) Έστω ότι η $f$ είναι 1-1 και επί, και έστω $b \in B$. Αφού η $f$ είναι επί υπάρχει τουλάχιστον ένα $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = b$. Έστω ότι υπάρχει και δεύτερο $a' \in A$ με $f(a') = b$. Τότε $f(a) = f(a')$ και επειδή η $f$ είναι 1-1 θα πρέπει $a = a'$. Συνεπώς για $b \in B$ υπάρχει μοναδικό $a$ τέτοιο ώστε $f(a) = b$. Ορίζουμε την απεικόνιση $g: B \to A$ έτσι ώστε η εικόνα του $b \in B$ μέσω της $g$ ($g(b)$) να είναι το μοναδικό $a \in A$ για το οποίο ισχύει $f(a) = b$. Δηλαδή $g(b) = a$. Από τη σύνθεση των $f$ και $g$ θα ισχύει

$$f(g(b)) = b \text{ για κάθε } b \in B \text{ και}$$
$$g(f(a)) = a \text{ για κάθε } a \in A.$$

Άρα $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$ και η $g$ είναι η αντίστροφη της $f$.

**Πρόταση 0.6** Αν μια απεικόνιση $f: A \to B$ είναι ένα προς ένα και επί τότε έχει μοναδική αντίστροφη που συμβολίζεται με $f^{-1}$

__Απόδειξη__: Από την απόδειξη της πρότασης 0.5 είδαμε ότι αν μια απεικόνιση είναι 1-1 και επί τότε έχει αντίστροφη. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι μοναδική. Έστω οι απεικονίσεις $g_1, g_2: B \to A$ δύο διαφορετικές αντίστροφες της $f$. Από τον ορισμό $g_1 \circ f = 1_A = g_2 \circ f$ και $f \circ g_1 = 1_B = f \circ g_2$

Τότε $(g_1 \circ f) \circ g_2 = 1_A \circ g_2 = g_2$ από την πρόταση 0.2 και την προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης.
Επίσης $(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ 1_B = g_1$.
Άρα $g_1 = g_2$. Άτοπο αφού από υπόθεση $g_1 \neq g_2$ ■

Πρόταση 0.7 Αν $f: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$ είναι 1-1 και επί τότε και η $g \circ f: A \to \Gamma$ είναι 1-1 και επί και

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Ορισμός 0.14 Έστω δύο σύνολα A και B. Η απεικόνιση $\pi_1: A \times B \to A$ με $(a, b) \longrightarrow a$ λέγεται προβολή στο A.
(Ανάλογα ορίζεται και η προβολή $\pi_2$ στο B)