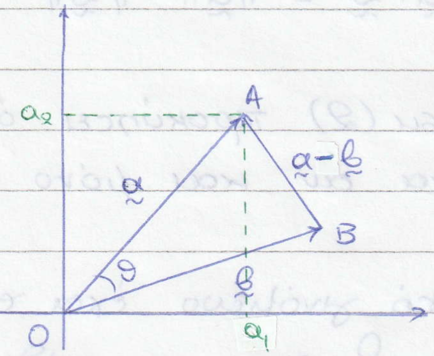
# 8. Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο

## 8.1 Εσωτερικό γινόμενο

Θεωρούμε τα στοιχεία $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2)$ και $\underset{\sim}{b} = (b_1, b_2)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Το εσωτερικό γινόμενο του $\underset{\sim}{a}$ επί το $\underset{\sim}{b}$ ορίζεται ως ο πραγματικός αριθμός

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Στο καρτεσιανό επίπεδο θα έχουμε




$\underset{\sim}{a} = \overrightarrow{OA}$

$\underset{\sim}{b} = \overrightarrow{OB}$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα το μήκος του $\underset{\sim}{a}$ θα είναι

$$\|\underset{\sim}{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{a}}$$

Επίσης από το νόμο των συνημιτόνων θα πρέπει

$$\|\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}\|^2 = \|\underset{\sim}{a}\|^2 + \|\underset{\sim}{b}\|^2 - 2\|\underset{\sim}{a}\| \|\underset{\sim}{b}\| \,\text{συν}\theta$$

(Αν $\|\underset{\sim}{a}\| \neq 0$ και $\|\underset{\sim}{b}\| \neq 0$)

$$\text{συν}\theta = \frac{\|\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}\|^2 - \|\underset{\sim}{a}\|^2 - \|\underset{\sim}{b}\|^2}{-2\|\underset{\sim}{a}\| \|\underset{\sim}{b}\|} =$$

$$= \frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2-(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2)}{-2\|\underset{\sim}{a}\|\,\|\underset{\sim}{b}\|}$$

$$= \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\|\underset{\sim}{a}\|\,\|\underset{\sim}{b}\|} = \frac{a\cdot b}{\|\underset{\sim}{a}\|\,\|\underset{\sim}{b}\|} \qquad (1)$$

Συνεπώς τόσο το μήκος ενός διανύσματος όσο και η γωνία $\theta$ μεταξύ δυο διανυσμάτων μπορούν να ορισθούν μέσω του εσωτερικού γινομένου. Από την (1) προκύπτει ότι

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = \|\underset{\sim}{a}\|\cdot\|\underset{\sim}{b}\|\cdot \text{συν}\theta. \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι δυο διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}=0$.

Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

(α) $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{a}$ για κάθε $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in\mathbb{R}^2$

(β) $(\lambda\cdot\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{b} = \lambda(\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b})$ για κάθε $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in\mathbb{R}^2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$

(γ) $(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})\cdot\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{\gamma}+\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{\gamma}$ για κάθε $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{\gamma}\in\mathbb{R}^2$

(δ) $\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a}>0$ για κάθε $\underset{\sim}{a}\neq 0$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^\nu$, δηλαδή για $\underset{\sim}{a}=(a_1,a_2,\dots,a_\nu)$, $\underset{\sim}{b}=(b_1,b_2,\dots b_\nu)$

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = \sum_{i=1} a_i b_i = a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_\nu b_\nu.$$

$$= \|\underset{\sim}{a}\|\cdot\|\underset{\sim}{b}\|\ \text{συν}\theta$$

όπου $\|\underset{\sim}{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2} = \sqrt{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a}}$ και $\theta$ η γωνία μεταξύ των $\underset{\sim}{a}$ και $\underset{\sim}{b}$ ώστε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{a}\| \cdot \|\underset{\sim}{b}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

**Ορισμός 8.1** Ένα εσωτερικό γινόμενο επί του διανυσματικού χώρου V είναι μια απεικόνιση από το καρτεσιανό γινόμενο $V \times V$ στο σύνολο $\mathbb{F}$, την τιμή της οποίας στο διατεταγμένο ζεύγος $(u,v)$ με $u,v \in V$ τη συμβολίζουμε με $\langle u,v \rangle$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i) $\langle u,v \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$

(iii) $\langle u+w, v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle w,v \rangle$

(iv) $\langle u,u \rangle > 0$ για κάθε $u \neq 0$

όπου $u,v,w \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$

(Σημείωση: με $\bar{u}$ συμβολίζουμε το συζυγή μιγαδικό αριθμό αν $u = a+bi$ με $a,b \in \mathbb{R}$ τότε $\bar{u} = a-bi$)

Στην περίπτωση που ισχύει ο ορισμός 8.1, ο V ονομάζεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν το σύνολο $\mathbb{F}$ είναι το $\mathbb{R}$ (αντίστοιχα το $\mathbb{C}$) τότε ο V λέγεται πραγματικός ή Ευκλείδιος χώρος (αντίστοιχα μιγαδικός χώρος)

## 8.2 Μήκος Διανυσμάτων

Σε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο για κάθε $v \in V$ ισχύει $\langle v,v \rangle \geq 0$. Ορίζουμε ως μήκος του $v$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$$

Προφανώς για $u = 0$ θα ισχύει $\|u\| = 0$, ενώ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle} = |\lambda| \, \|u\|$$

Για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^n$ το μήκος ενός διανύσματος $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι

$$\|\underset{\sim}{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a} \rangle}$$ και

$$\|\lambda \underset{\sim}{a}\| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \ldots + \lambda^2 a_n^2} = \lambda \|\underset{\sim}{a}\|.$$

Δυο στοιχεία $u, v$ ενός διανυσματικού χώρου $V$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους αν $\langle u, v \rangle = 0$. Από αυτό τον ορισμό προκύπτει ότι το μηδενικό στοιχείο του $V$ είναι ορθογώνιο προς οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του $V$ και είναι το μοναδικό που έχει αυτή την ιδιότητα

**Θεώρημα 8.2** (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Έστω ένας διανυσματικός χώρος $V$ με εσωτερικό γινόμενο και $u_1, u_2 \in V$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους τότε ισχύει ότι

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$

Γενικότερα αν $u_1, u_2, \ldots u_n \in V$ είναι ανά δύο κάθετα (ορθογώνια) μεταξύ τους, τότε

$$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$$

__Απόδειξη__ Από την υπόθεση έχουμε $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, οπότε

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \langle u_1 + u_2, u_1 + u_2 \rangle =$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle$$

$$= \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$

καθώς ισχύει $<u_1, u_2> = <\bar{u}_2, \bar{u}_1> = 0$.

Επαγωγικά για n μπορούμε να δείξουμε τη γενίκευση του θεωρήματος.

Θεώρημα 8.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Αν $u_1, u_2 \in V$, τότε

$$|<u_1, u_2>| \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\|$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $u_1$ και $u_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

<u>Απόδειξη</u> Για $u_1$ και $u_2$ : $u_1 = u_2 = 0$ τα δύο μέλη της ανισότητας είναι ίσα και επομένως ισχύει. Έστω ότι $u_2 \neq 0$ Τότε το διάνυσμα

$$u_1 - \frac{<u_1, u_2>}{<u_2, u_2>} u_2$$

είναι κάθετο στο $u_2$ και ισχύει

$$\|u_1\|^2 = \left\| \frac{<u_1, u_2>}{<u_2, u_2>} u_2 \right\|^2 + \left\| u_1 - \left( \frac{<u_1, u_2>}{<u_2, u_2>} u_2 \right) \right\|^2$$

και συνεπώς ισχύει

$$\|u_1\|^2 \geq \frac{|<u_1, u_2>|^2}{\|u_2\|^2} \Leftrightarrow$$

$$\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 \geq |<u_1, u_2>|^2 \Rightarrow$$

$$\|u_1\| \|u_2\| = \sqrt{\|u_1\|^2 \|u_2\|^2} \geq \sqrt{|<u_1, u_2>|^2} = |<u_1, u_2>|$$

Η ισότητα $\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 = |\langle u_1, u_2\rangle|^2$ ισχύει αν και μόνο αν

$$\|u_1\|^2 = \frac{|\langle u_1, u_2\rangle|^2}{\|u_2\|^2} = \left\| \frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 \right\|^2$$

που όμως θα ισχύει αν και μόνο αν

$$\left\| u_1 - \frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 \right\|^2 = 0$$

που με τη σειρά του ισοδυναμεί με

$$u_1 = \frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2$$

αποδεικνύοντας το δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος. ◙

Παρατήρηση 2.1 Η ανισότητα Cauchy-Schwarz αποδείχθηκε χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα και γράφοντας το $u_1$ ως άθροισμα ενός πολλαπλάσιου του $u_2$ και ενός διανύσματος κάθετου στο $u_2$. Αυτό προσδιορίζεται ως

$$u_1 = \lambda u_2 + (u_1 - \lambda u_2).$$

Η απαίτηση να είναι το $u_2$ κάθετο στο $u_1 - \lambda u_2$ δηλαδή:

$$\langle u_1 - \lambda u_2, u_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle - \lambda \langle u_2, u_2\rangle = 0$$

δίνει $\lambda = \dfrac{\langle u_1, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}$

2) Αν ο διανυσματικός χώρος $V$ είναι ένας πραγματικός Ευκλείδιος χώρος τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz δηλώνει ότι, αν $v_1, v_2 \in V$ μη μηδενικά, τότε

$$-1 \leq \frac{<v_1, v_2>}{\|v_1\|\|v_2\|} \leq 1.$$

Επομένως υπάρχει ένας (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{συν}\theta = \frac{<v_1, v_2>}{\|v_1\|\|v_2\|}$$

Ο αριθμός αυτός λέγεται γωνία μεταξύ των $v_1$ και $v_2$. Αν τα $v_1$ και $v_2$ είναι ορθογώνια τότε $\text{συν}\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Αν τα $v_1$ και $v_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$v_1 = \lambda v_2$$

τότε για $\lambda > 0 \Rightarrow \text{συν}\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$, ενώ

για $\lambda < 0 \Rightarrow \text{συν}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$.

3) Η εξίσωση

$$<v_1 - v_2, v_1 - v_2> = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2<v_1, v_2>$$
$$= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\|v_1\|\|v_2\| \cdot \text{συν}\theta$$

εκφράζει το νόμο των συνημιτόνων.

Πόρισμα 8.1 (Τριγωνική Ανισότητα) Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος και $u_1, u_2 \in V$. Τότε:

$$\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$$

Απόδειξη Ισχύει ότι

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \langle u_1 + u_2, u_1 + u_2 \rangle = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle$$

$$= \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \langle u_1, u_2 \rangle + \langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle$$

$$\leq \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + |\langle u_1, u_2 \rangle| + |\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle|$$

$$= \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 2|\langle u_1, u_2 \rangle|$$

$$\leq \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 2\|u_1\|\|u_2\| = (\|u_1\| + \|u_2\|)^2$$

Οπότε τελικά

$$\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|.$$

## 8.3 Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός 8.2 Ένα σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου $V$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται ορθογώνιο σύνολο αν τα διανύσματα $u_i$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους. Ένα ορθογώνιο σύνολο θα λέγεται ορθοκανονικό αν κάθε διάνυσμα του συνόλου έχει μήκος 1. Τα διανύσματα που έχουν μήκος 1 λέγονται μοναδιαία

Παρατήρηση 8.2 Τα ορθοκανονικά σύνολα λέγονται και ορθομοναδιαία καθώς τα στοιχεία τους είναι μοναδιαία.

Λήμμα 8.1 Αν $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του $V$, τότε

$$\|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k\| = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots + |\lambda_k|^2$$

<u>Απόδειξη</u> Προκύπτει άμεσα από το Πυθαγόρειο θεώρημα ∎

Πόρισμα 8.2 Κάθε ορθοκανονικό σύνολο του $V$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο του $V$. Από το Λήμμα 8.1 προκύπτει ότι κάθε σχέση της μορφής

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = \Theta, \lambda_i \in \mathbb{F}$$

σημαίνει ότι $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \ldots + |\lambda_k|^2 = 0$. Δηλαδή $\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k$. ∎

Είναι προφανές ότι ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ είναι βάση του $V$ αν και μόνο αν $\dim V = k$.

Ορισμός 8.3. Μια βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ ενός διανυσματικού χώρου $V$ λέγεται ορθοκανονική βάση αν το σύνολο αυτό είναι ορθοκανονικό.

Θεώρημα 8.3 Ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{u_1, \ldots, u_k\}$ του $V$ είναι ορθοκανονική βάση αν και μόνο αν ισχύει

$$\langle u, u \rangle = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_k|^2 \quad \forall u \in V$$

με $\lambda_i = \langle u, u_i \rangle$, $i = 1, \ldots, k$.

<u>Απόδειξη</u> Αφήνεται ως άσκηση. ∎

**Παρατήρηση 8.3** (1) Η ισότητα του θεωρήματος 8.3 είναι γνωστή ως ισότητα του Parseval.
(2) Μπορεί να δειχθεί ότι, αν $\{v_1, \dots, v_k\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο του $V$ (όχι αναγκαστικά βάση) τότε για κάθε $u \in V$ ισχύει ότι

$$\langle u, u \rangle \geq |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \dots + |\lambda_k|^2$$

όπου $\lambda_i = \langle u, v_i \rangle$ για $i = 1, \dots, k$.
Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή ως ανισότητα του Bessel.

**Θεώρημα 8.4** (Μέθοδος Ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt)
Κάθε διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ μια βάση του $V$. Ορίζουμε επαγωγικά το σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ως εξής

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \frac{\langle v_k, u_{k-1} \rangle}{\|u_{k-1}\|^2} u_{k-1} - \dots - \frac{\langle v_k, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

Τα $u_1, u_2, \dots u_k$ είναι μη μηδενικά, διαφορετικά το $\{v_1, \dots, v_k\}$ θα ήταν γραμμικά εξαρτημένο. Επαγωγικά θα δείξουμε ότι το $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ είναι ορθογώνιο. Για $n=1$ είναι δεδομένο. Αν $n>1$ και το $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ είναι ορθογώνιο τότε

$$\langle u_n, u_i \rangle = \langle v_n, u_i \rangle - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} \langle u_{n-1}, u_i \rangle$$

$$- \dots - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \langle u_1, u_i \rangle$$

$$= \langle v_n, u_i \rangle - \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_i \rangle = 0.$$

Συνεπώς το $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα είναι βάση. Θέτοντας τέλος $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση.