6. Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων.

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων και ν αγνώστων έχει τη μορφή

$$A\underset{\sim}{x} = 0$$

με $A \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος αυτού είναι ένας διανυσματικός χώρος, και πιο συγκεκριμένα είναι υπόχωρος του $\operatorname{Ker} \gamma_A$, όπου

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu \times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu \times 1}, \text{ με}$$

$$\gamma_A(\underset{\sim}{x}) = A\underset{\sim}{x}$$

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε πότε ένα σύστημα της μορφής

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

έχει λύση και θα δούμε ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \underset{\sim}{b})$, όπου με $A \mid \underset{\sim}{b}$ συμβολίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

6.1 Ομογενή Συστήματα.

Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\nu}x_\nu &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\nu}x_\nu &= 0 \\ &\vdots \\ a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \dots + a_{\mu\nu}x_\nu &= 0 \end{aligned}$$

με $a_{ij} \in \mathbb{F}$, ή $A\underset{\sim}{x} = 0$
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu \times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu \times 1}$$

$$\text{με } \gamma_A(\underset{\sim}{x}) = A\underset{\sim}{x}$$

Είναι προφανές ότι το σύνολο

$$\operatorname{Ker}\gamma_A = \{x \in \mathbb{F}^{\nu \times 1} : A\underset{\sim}{x} = 0\}$$

είναι το σύνολο λύσεων του συστήματος. Επίσης αποδεικνύεται ότι $\dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Ker}\gamma_A) = \nu - \dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Im}\gamma_A)$. Όμως $\operatorname{Im}_{\mathbb{F}}\gamma_A$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu \times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A θα πρέπει $\dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Im}\gamma_A) = \operatorname{rank}(A)$. Από όλα αυτά προκύπτει ότι το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος μ εξισώσεων με ν αγνώστους, $Ax = 0$, είναι ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ διάστασης $\nu - \operatorname{rank}(A)$. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι το σύστημα $A\underset{\sim}{x} = 0$ θα έχει μη τετριμμένες λύσεις αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) < \nu$. Εναλλακτικά αν το σύστημα έχει περισσότερους αγνώστους από το πλήθος των εξισώσεων τότε το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση. (αν δηλαδή $\nu > \mu$)

Στην περίπτωση που το σύστημα έχει ν αγνώστους και ν εξισώσεις, τότε έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$

6.2 Γραμμικά Συστήματα.

Γενικά ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων (μ) και ν αγνώστων έχει τη μορφή:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\nu}x_\nu = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\nu}x_\nu = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \dots + a_{\mu\nu}x_\nu = b_\mu$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{F}$ και $b_i \in \mathbb{F}$, ή σε μορφή πινάκων

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

όπου $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ και $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.

Ως λύση του συστήματος θεωρείται ένα στοιχείο

$$\underset{\sim}{\lambda} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} \quad \text{με} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{bmatrix}$$

αν και μόνο αν $A\cdot\underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{b}$ ή ισοδύναμα αν

$$\underset{\sim}{b} = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_\nu c_\nu.$$

όπου c_j είναι η j στήλη του πίνακα A. Δηλαδή το $\underset{\sim}{\lambda}$ είναι λύση του συστήματος αν και μόνο αν το $\underset{\sim}{b}$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών c_j του A μέσω των στοιχείων του $\underset{\sim}{\lambda}$. Επειδή ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες c_j του A είναι η εικόνα $Im(\gamma_A)$ της απεικόνισης

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \to \mathbb{F}^{\mu\times 1}$$

$$\gamma_A(\underset{\sim}{x}) = A\underset{\sim}{x}$$

τότε ισχύει ότι

Λήμμα 6.1 Για ένα σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ με $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) το σύστημα έχει λύση

(β) το $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών c_j του A.

(γ) $\underset{\sim}{b} \in Im\, \gamma_A$

Από το λήμμα 6.1 προκύπτει ότι, αφού το $\underset{\sim}{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A (c_j $j=1,\dots\nu$) τότε

$$rank(A) = rank(A|\underset{\sim}{b})$$

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 6.1 Ένα σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν

$$rank(A) = rank(A|\underset{\sim}{b})$$

<u>Απόδειξη</u> Έχουμε δείξει μέσω του Λήμματος 6.1 ότι αν το σύστημα έχει λύση τότε

$$rank(A) = rank(A|\underset{\sim}{b})$$

Αρκεί να δείξουμε το αντίστροφο: Αν $rank(A)=rank(A|\underline{b})$
Ο υπόχωρος του $F^{\mu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες c_j του A είναι ο $Im(\gamma_A)$. Από τον ορισμό της τάξης του πίνακα ισχύει

$$dim_{F}[Im(\gamma_A)] = rank(A)$$

Αντίστοιχα ο υπόχωρος που παράγεται από τις στήλες του $(A|\underline{b})$ είναι $Im\,\gamma_{(A|\underline{b})}$ και θα πρέπει

$$dim_{F}(Im\,\gamma_{(A|\underline{b})}) = rank(A|\underline{b})$$

Ισχύει ότι $Im\,\gamma_A \subseteq Im\,\gamma_{(A|\underline{b})}$ και επειδή

$$dim_{F}(Im\,\gamma_A) = rank(A) = rank(A|\underline{b}) = dim_{F}(Im\,\gamma_{(A|\underline{b})})$$

θα ισχύει $Im\,\gamma_A = Im\,\gamma_{(A|\underline{b})}$. Επειδή όμως $\underline{b} \in Im\,\gamma_{(A|\underline{b})}$ θα πρέπει

$$\underline{b} \in Im\,\gamma_A$$

που από το Λήμμα 6.1 είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη λύσης του συστήματος

Παράδειγμα 6.1 Για το ακόλουθο σύστημα να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το σύστημα έχει λύση

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

Από το Θεώρημα 6.1 το σύστημα θα έχει λύση αν και μόνο αν

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|\underset{\sim}{b})$$

$$(A|\underset{\sim}{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -\frac{1}{3}r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4/3 \end{bmatrix}$$

Από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που εφαρμόσαμε στον $(A|\underset{\sim}{b})$ βλέπουμε ότι $\operatorname{rank}(A) = 2$ και θα πρέπει $\operatorname{rank}(A|\underset{\sim}{b}) = 2$, δηλαδή $a - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

Επομένως το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν

$a = 4/3$.

Το σύνολο των λύσεων ενός συστήματος της μορφής $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ μπορεί να εκφραστεί μέσω της αντίστροφης εικόνας της απεικόνισης $\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{\mu \times 1}$ με $\gamma_A(\underset{\sim}{x}) = A\underset{\sim}{x}$

Πιο συγκεκριμένα το σύνολο λύσεων του $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ είναι το σύνολο

$$\{ x \in \mathbb{F}^{\nu \times 1} \mid A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \} \equiv \gamma_A^{-1}(\{\underset{\sim}{b}\})$$

που είναι η αντίστροφη εικόνα του υποσυνόλου $\{\underset{\sim}{b}\}$ του $\mathbb{F}^{\mu \times 1}$ μέσω της γ_A

Αν συμβολίσουμε με $x + W$ τό σύνολο

$$\{ x + w \in V : w \in W \}$$

για κάποιο $x \in V$ όπου το V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και W ένας υπόχωρος αυτού, τότε αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 6.1 Για ένα γραμμικό σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ με $A \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$, αν $\underset{\sim}{\lambda} \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ είναι μια λύση του συστήματος, τότε το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το υποσύνολο του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$:

$$\lambda + \mathrm{Ker}(\gamma_A)$$

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $z \in \lambda + \mathrm{Ker}(\gamma_A)$. Τότε υπάρχει

$w \in Ker(\gamma_A)$ τέτοιο ώστε $z = \lambda + w$ και

$$Az = A(\lambda + w) = A\lambda + Aw = b + 0 = b$$

Επομένως το z είναι λύση του συστήματος και επομένως $z \in \gamma_A^{-1}(\{b\}) \Rightarrow$

$$\lambda + Ker(\gamma_A) \subseteq \gamma_A^{-1}(\{b\}) \qquad (1)$$

Έστω τώρα $x_0 \in \gamma_A^{-1}(\{b\})$ μια λύση του συστήματος.

$$Ax_0 = b$$

Επειδή και το λ είναι λύση του συστήματος

$$A\lambda = b \quad \text{θα ισχύει ότι}$$

$$A(x_0 - \lambda) = Ax_0 - A\lambda = b - b = 0$$

Το $x_0 - \lambda$ είναι λύση του ομογενούς:

$$x_0 - \lambda \in Ker(\gamma_A)$$

Συνεπώς $\lambda + (x_0 - \lambda) \in \lambda + Ker(\gamma_A) \Leftrightarrow$

$$\cancel{\lambda} + x_0 - \cancel{\lambda} \in \lambda + Ker(\gamma_A) \Leftrightarrow$$

$$x_0 \in \lambda + Ker(\gamma_A)$$

Δείξατε ότι $\gamma_A^{-1}(\{b\}) \subseteq \lambda + Ker(\gamma_A)$ (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι $\gamma_A^{-1}(\{b\}) = \lambda + Ker(\gamma_A)$

Πόρισμα 6.1 Για το γραμμικό σύστημα $A\underline{x}=\underline{b}$ με $A\in\mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$ μια βάση του χώρου των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x}=0$, αν $\underline{\lambda}$ είναι μια λύση του $A\underline{x}=\underline{b}$, τότε το σύνολο των λύσεων του $A\underline{x}=\underline{b}$ είναι το

$$\{\underline{\lambda}+\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2+\dots+\varphi_k u_k\in\mathbb{F}^{\nu\times 1} : \varphi_j\in\mathbb{F},\ j=1,\dots k\}$$

Επιπλέον $k=\nu-\mathrm{rank}(A)$.

<u>Απόδειξη</u> Άμεση συνέπεια της πρότασης 6.1.

Θεώρημα 6.2 Έστω ένα γραμμικό σύστημα $A\underline{x}=\underline{b}$ με $A\in\mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Το σύστημα έχει <u>μοναδική</u> λύση αν και μόνο αν

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A|\underline{b})=\nu$$

<u>Απόδειξη</u> Από την πρόταση 6.1, αν το σύστημα έχει λύση, τότε θα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}(\gamma_A)=\{\underline{0}\}$. Όμως

$$\mathrm{rank}(A)=\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Im}(\gamma_A))=\nu-\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ker}(\gamma_A))$$

Από το Θεώρημα 6.1 παίρνουμε το ζητούμενο.

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.2 είναι το ακόλουθο πόρισμα

Πόρισμα 6.2 Ένα σύστημα $A\underline{x}=\underline{b}$ με $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det(A)\neq 0$

Παράδειγμα 6.2 Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

με

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών παίρνουμε

$$(A|\underset{\sim}{b}) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_1]{\substack{r_2 \to r_2 + 3r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to -\frac{1}{3} r_4]{r_3 \to r_3 - 2r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $rank(A) = rank(A|\underset{\sim}{b}) = 3$, επομένως το σύστημα έχει λύση. Επιπλέον το σύστημα $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\Delta\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\gamma}$ όπου

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Μια λύση του συστήματος είναι η

$$\underset{\sim}{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Η $\underset{\sim}{x_0}$ θα είναι και λύση του συστήματος $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ και επειδή $rank(A) = rank(A|\underset{\sim}{b}) = 3$ από το Θεώρημα 6.2 είναι και μοναδική.