5. Ορίζουσες

Όπως και με κάθε άλλο πίνακα έτσι και ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί να γραφτεί στη μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad r_i = [a_{i1}\ a_{i2} \dots, a_{i\nu}] \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$$

είναι η γραμμή i του πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $\nu \in \mathbb{N}$

Ορισμός 5.1 Μια απεικόνιση $D: \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ λέγεται απεικόνιση ορίζουσας αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(1) Η D είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή, δηλαδή για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $i=1,2,\dots,\nu$ ισχύει ότι

(i) Αν $r_i = x + y$, $x, y \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$, τότε

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ y \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right)$$

(ii) Αν $r_i = \lambda x$, τότε

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right) = \lambda D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right)$$

(2) Αν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίσες τότε $D(A)=0$, δηλαδή αν για $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ισχύει ότι $r_i = r_j$, $i \neq j$, τότε $D(A)=0$.

(3) Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα (ή μοναδιαίου) $\nu\times\nu$ ισούται με τη μονάδα, δηλαδή $D(I_\nu)=1$.

Παραδείγματα 5.1 (α) Για $\nu=1$ η απεικόνιση $D: \mathbb{F}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $D(x) = x$ είναι απεικόνιση ορίζουσας.

(β) Για $\nu=2$ η απεικόνιση $D: \mathbb{F}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{F}$ με

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

είναι απεικόνιση ορίζουσας.

Παρατήρηση 5.1 Από την ιδιότητα (1) του ορισμού 5.1 προκύπτει ότι για ένα πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $r_i = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k b_k$ με $b_k \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ και $\lambda_k \in \mathbb{F}$ για $k = 1, 2, \dots \mu$ τότε

$$D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k b_k \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right) = \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k D\left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}\right)$$

Δηλαδή αν μια γραμμή του A μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ τότε και η ορίζουσα θα είναι γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων οριζουσών των πινάκων που θα προκύψουν από την αντικατάσταση–ανάλυση της γραμμής αυτής.

Πρόταση 5.1 Έστω $D: \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και B ο πίνακας που θα προκύψει από την εναλλαγή των γραμμών r_i και r_j του A τότε

$$D(A) = -D(B)$$

(β) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και B ο πίνακας που θα προκύψει αν σε μια γραμμή του A προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής του A τότε

$$D(A) = D(B)$$

γ) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και οι γραμμές του είναι γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ τότε $D(A) = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}$$

Αν πάρουμε το άθροισμα των οριζουσών των A και B από την ιδιότητα (2) του ορισμού 5.1 θα ισχύει ότι

$$D(A)+D(B) = D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} =$$

$$D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} =$$

από ιδιότητα (β) ορισμού 5.1.

$$D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i+r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i+r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} =$$

$$D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i+r_j \\ \vdots \\ r_i+r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = 0$$

καθώς ο τελευταίος πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες με r_i+r_j. Συνεπώς $D(A)+D(B)=0 \Leftrightarrow$ $D(A) = -D(B)$

(β) Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με

$$A=\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}$$

και B ο πίνακας που θα προκύψει αν $r_i \to r_i + \lambda r_j$ με $i \neq j$

δηλαδή

$$B=\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i+\lambda r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $j>i$. Τότε

$$D(B)=D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i+\lambda r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = D(A) + 0 = D(A)$$

καθώς

$$D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = \lambda D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας έχει δύο γραμμές ίδιες (r_j) και συνεπώς από το (2) του ορισμού 5.1 η ορίζουσά του θα είναι 0.

(γ) Επειδή οι γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ του πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε μια από αυτές μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων :

$$r_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \lambda_j r_j$$

Επομένως

$$D(A) = D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \lambda_j r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \lambda_j D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix}$$

Το άθροισμα αυτό θα είναι

$$\lambda_1 D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_1 \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + \lambda_2 D\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_2 \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_\nu D\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_\nu \\ \vdots \\ r_\nu \end{bmatrix} = 0$$

Κάθε ένας από τους πίνακες των οριζουσών έχουν δύο ίδιες γραμμές και συνεπώς κάθε μια από τις ορίζουσες θα ισούται με 0.

Πόρισμα 5.1 Αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ δεν είναι αντιστρέψιμος τότε $\det A = 0$

Απόδειξη Ο A είναι τετραγωνικός πίνακας $\nu\times\nu$. Αφού δεν είναι αντιστρέψιμος θα πρέπει $\mathrm{rank}(A)<\nu$ και επομένως οι γραμμές του A θα είναι γραμμικά εξαρτημένες. Από το (γ) της πρότασης 5.1 έπεται ότι $\det A=0$.

Αν γνωρίζουμε μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των πινάκων $(\nu-1)\times(\nu-1)$ τότε μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση ορίζουσας και στο διανυσματικό χώρο των $\nu\times\nu$ πινάκων. Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ένας τετραγωνικός $\nu\times\nu$ πίνακας. Συμβολίζουμε με A_{ij} τον πίνακα $(\nu-1)\times(\nu-1)$ που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και τη j στήλη.
Αν π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&4\\3&0&1\end{bmatrix}\quad \text{τότε}$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix},\quad A_{23}=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}\quad \text{και}\quad A_{31}=\begin{bmatrix}0&1\\1&4\end{bmatrix}$$

Το παράδειγμα 5.1(β) δείχνει τον υπολογισμό μιας ορίζουσας πίνακα 2×2. Δεδομένου αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα. Η ακόλουθη πρόταση δείχνει πως.

Πρόταση 5.2 Έστω $\nu\geq2$ και $D:\mathbb{F}^{(\nu-1)\times(\nu-1)}\longrightarrow\mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας. Για $j=1,2,\dots,\nu$ ορίζουμε την απεικόνιση $f_j:\mathbb{F}^{\nu\times\nu}\longrightarrow\mathbb{F}$ ως εξής

Αν $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ τότε $f_j(A)=\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}a_{ij}D(A_{ij})$

Τότε κάθε f_j είναι απεικόνιση ορίζουσας.

Απόδειξη Παραλείπεται.

5.1 Ύπαρξη και Μοναδικότητα της ορίζουσας

Πόρισμα 5.2 Για κάθε φυσικό αριθμό ν υπάρχει τουλάχιστον μία απεικόνιση ορίζουσας με πεδίο ορισμού το $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

Απόδειξη Με επαγωγή στο ν.
Για ν=1 η απεικόνιση $D: \mathbb{F}^{1\times 1} \to \mathbb{F}$ με $D(x) = x$ είναι απεικόνιση ορίζουσας.
Έστω ν>1 και $D: \mathbb{F}^{(\nu-1)\times(\nu-1)} \to \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας. Τότε από την πρόταση 5.2 ορίζεται μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ που είναι ορίζουσα.

Παράδειγμα 5.3. Όπως είδατε νωρίτερα η απεικόνιση $D: \mathbb{F}^{2\times 2} \to \mathbb{F}$ με

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

είναι μια απεικόνιση ορίζουσας. Από την πρόταση 5.2 για ν=3 και ένα πίνακα $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ ορίζεται η απεικόνιση $f_1: \mathbb{F}^{3\times 3} \to \mathbb{F}$ με

$$f_1(A) = f_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} D(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} D(A_{31})$$

$$= a_{11} D\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} D\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} D\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Όμοια ορίζονται οι απεικονίσεις f_2, f_3.

$$f_2(A) = (-1)^{1+2} a_{12} D(A_{12}) + (-1)^{2+2} a_{22} D(A_{22}) + (-1)^{3+2} a_{32} D(A_{32})$$

$$= -a_{12} D\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{32} D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

$$f_3(A) = (-1)^{1+3} a_{13} D(A_{13}) + (-1)^{2+3} a_{23} D(A_{23}) + (-1)^{3+3} a_{33} D(A_{33})$$

$$= a_{13} D\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - a_{23} D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + a_{33} D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Πρόταση 5.3 Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και $D, D' : \mathbb{F}^{\nu \times \nu} \to \mathbb{F}$ δυο απεικονίσεις ορίζουσας. Τότε $D = D'$

Απόδειξη Παραλείπεται

Θεώρημα 5.1 Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση ορίζουσας $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \to \mathbb{F}$. Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ τότε η εικόνα του A μέσω της D, $D(A)$, ονομάζεται ορίζουσα του A και συμβολίζεται με $\det A$.

Απόδειξη Άμεση συνέπεια του πορίσματος 5.2 και της πρότασης 5.3.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι οι απεικονίσεις $f_j : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \to \mathbb{F}$ για $j=1,2,\dots,\nu$ όπως αυτές ορίστηκαν στην πρόταση 5.2 θα είναι ίσες και γενικότερα

$$f_j(A) = \det A \qquad \forall j=1,\dots,\nu$$

Σημειώνεται ότι η παράσταση αυτή της ορίζουσας ενός $\nu\times\nu$ πίνακα ονομάζεται ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη στήλη j ή ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς τη στήλη j. Από το Θεώρημα 5.1 είναι σαφές ότι το ανάπτυγμα αυτό δεν εξαρτάται από τη στήλη ως προς την οποία το θεωρούμε.

Παράδειγμα 5.4 (α) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Υπολογίζουμε το ανάπτυγμα Laplace ως προς την 3η στήλη.

$$\det A = f_3(A) = (-1)^{1+3}(-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 11 + 18 - 1 = 28$$

(β) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Υπολογίζουμε το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη.

$$\det A = f_1(A) = (-1)^{1+1}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot 0\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$-1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 15 = -15$$

(γ) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Ένας τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας του A είναι μέσω του αναπτύγματος του Laplace. Εναλλακτικά, μπορούμε μέσα από τις ιδιότητες της ορίζουσας να κατασκευάζουμε από τον A ένα άλλο πίνακα του οποίου η ορίζουσα υπολογίζεται πιο εύκολα. Αν ο πίνακας είναι $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, τότε για τον B θα πρέπει $\det A = \kappa \cdot \det B$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$

Από την ιδιότητα (β) της πρότασης 5.1 θα έχουμε ότι

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(r_2 \to r_2 + 2r_1)}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(r_3 \to r_3 + r_1)}{=}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(r_4 \to r_4 - r_1)}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(r_3 \to r_3 + 2r_2)}{=}$$

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 6 & 8\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \overset{(r_4\to r_4 - r_2)}{=} \det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 6 & 8\\ 0 & 0 & -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -5\end{pmatrix} \overset{(r_4\to r_4 + \frac{2}{3}r_3)}{=} 2\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -5+\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός, επομένως η ορίζουσα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου. Γράφεται αν υπολογίσουμε την ορίζουσα f_1

$$\det A' = f_1(A') = (-1)^{1+1}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -5+\frac{8}{3}\end{pmatrix} +$$

$$(-1)^{2+1}\cdot 0\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -5+\frac{8}{3}\end{pmatrix} +$$

$$(-1)^{3+1}\cdot 0\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -5+\frac{8}{3}\end{pmatrix} +$$

$$(-1)^{4+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix} =$$

$$(-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5+\frac{8}{3} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)\Big[(-1)\,3\cdot\left(-5+\tfrac{8}{3}\right)+2\cdot4\cdot0+4\cdot0\cdot0-4\cdot3\cdot0$$

$$-2\cdot0\cdot\left(-5+\tfrac{8}{3}\right)-(-1)\cdot4\cdot0\Big] =$$

$$(-1)\cdot(-1)\cdot3\cdot\left(-5+\tfrac{8}{3}\right) = -15+8 = -7$$

Άρα $\det A = 2\cdot\det A' = 2\cdot(-7) = -14$.

5.2 Ιδιότητες Οριζουσών

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, αν $E\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας τότε

$$\det(EA) = \det E\cdot\det A.$$

(Υπενθυμίζεται ότι στοιχειώδης λέγεται ένας πίνακας αν αυτός έχει προκύψει από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον ταυτοτικό πίνακα)

Θεώρημα 5.2 Έστω τετραγωνικοί πίνακες $A, B\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε

$$\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B.$$

<u>Απόδειξη</u> Περίπτωση 1η: Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_k$ με $A=\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\dots\Gamma_k$. Συνεπώς

$$\det(AB) = \det(\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_k B) = \det\Gamma_1\cdot\det(\Gamma_2\dots\Gamma_k B)$$

$= \det\Gamma_1 \det\Gamma_2 \dots \det\Gamma_k \cdot \det B =$
$= \det(\Gamma_1\Gamma_2) \det\Gamma_3 \dots \det\Gamma_k \cdot \det B = \dots$
$\det(\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_k) \det B = \det A \cdot \det B.$

Περίπτωση 2η: Ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος άρα $rank(A) < \nu$ και $\det A = 0$. Αφού $rank(A) < \nu$ τότε και $rank(AB) < \nu$, δηλαδή και ο AB δεν είναι αντιστρέψιμος οπότε $\det(AB) = 0$. Επομένως

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Θεώρημα 5.3. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ θα είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

<u>Απόδειξη.</u> Αφού ο A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε $rank(A) < \nu$ και οι γραμμές του $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως από το (γ) της πρότασης 5.1 θα είναι $\det A = 0$.
Αρκεί να δείξουμε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε $\det A \neq 0$. Πράγματι σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ τέτοιοι ώστε $\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_k \cdot A = I_\nu$. Τότε

$\det(\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_k A) = \det I_\nu \Rightarrow$
$\det\Gamma_1 \cdot \det\Gamma_2 \dots \det\Gamma_k \cdot \det A = \det I_\nu = 1.$
Συνεπώς $\det A \neq 0$.

Παρατήρηση 5.2 Γενικά, για ένα πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
(α) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος
(β) Η τάξη του πίνακα είναι $rank(A) = \nu$
(γ) $\det A \neq 0$

Επίσης αποδεικνύονται και οι εξής ιδιότητες.
(α) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε

$$\det(A) = \det(A')$$

(β) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι πίνακες, τότε

$$\det A = \det B.$$

Μέσα από τον ορισμό της ορίζουσας ενός πίνακα μπορούμε να ορίσουμε και την ορίζουσα μιας γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$, όπου V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Αν $\hat{\upsilon} = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_k\}$ μια διατεταγμένη βάση του V. ορίζουμε

$$\det f = \det(f : \hat{\upsilon}, \hat{\upsilon})$$

Αν $\hat{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ μια άλλη διατεταγμένη βάση του V, ξέρουμε ότι οι πίνακες $(f : \hat{\upsilon}, \hat{\upsilon})$ και $(f : \hat{\upsilon}, \hat{\omega})$ είναι όμοιοι. Επομένως

$$\det(f : \hat{\upsilon}, \hat{\omega}) = \det(f : \hat{\upsilon}, \hat{\upsilon})$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$ είναι ανεξάρτητη από τις βάσεις ως προς τις οποίες υπολογίζεται. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης, και $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση στον V. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Η f είναι αντιστρέψιμη

(β) Η f είναι 1-1
(γ) Η f είναι επί
(δ) $\det f \neq 0$

<u>Απόδειξη</u> Παραλείπεται.

5.3 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και Ορίζουσες.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο πίνακας $B=(b_{ij})_{\nu\times\nu}$ με $b_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ λέγεται προσαρτημένος πίνακας του A και συμβολίζεται με $\operatorname{adj} A$ και ισχύει

$$A\cdot B = \det A \cdot I_\nu = BA$$

Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A$$

Παράδειγμα (Υπολογισμός αντιστρόφου τετραγωνικού πίνακα).
5.5 Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ισχύει ότι $\det A = 1\cdot1\cdot5 + 0\cdot(-1)\cdot1 + (-1)\cdot2\cdot2 - (-1)\cdot1\cdot1$
$\quad - 0\cdot2\cdot5 - 1\cdot(-1)\cdot2$
$= 4.$

$$
\text{adj}\, A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}
$$

Άρα $A^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\nu}x_\nu &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\nu}x_\nu &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{\nu\nu}x_\nu &= b_\nu .
\end{aligned}
$$

Σε μορφή πινάκων το σύστημα γράφεται ως

$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ όπου

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}
$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε

$$\underset{\sim}{x} = A^{-1} \cdot \underset{\sim}{b}$$

Επειδή ο πίνακας A έχει αντίστροφο:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj A$$

θα ισχύει

$$\underset{\sim}{x} = \frac{1}{\det A} \, adj A \cdot \underset{\sim}{b} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot adj A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}$$

με γενική λύση

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji}$$

Αν συμβολίσουμε με $\bar{A}_i$ τον πίνακα που προκύπτει από τον A με αντικατάσταση της i στήλης από το $\underset{\sim}{b}$ δηλαδή

$$A = [c_1 \; c_2 \dots c_i \dots c_\nu] \longrightarrow \bar{A}_j = [c_1 \; c_2 \dots \underset{\sim}{b} \dots c_\nu]$$

Τότε $\det \bar{A}_i = \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji}$, επομένως

$$x_i = \frac{\det \bar{A}_i}{\det A}$$

Δηλαδή

$$x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu i-1} & b_\nu & a_{\nu i+1} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}}{\det A}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως τύπος του Cramer

Παράδειγμα 5.6 Δίνεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$x_1 - x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίσαμε στο παράδειγμα 5.5 τον A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Με τη μέθοδο του Cramer θα έχουμε

$$x_1 = \frac{1}{4} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 7/4$$

$$x_2 = \frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{7}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ -7/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$