4. Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες

Μια γραμμική απεικόνιση από ένα διανυσματικό χώρο σε ένα άλλο μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα πίνακα. Για αυτό απαιτείται η επιλογή μιας βάσης σε κάθε ένα από τους διανυσματικούς χώρους. Πιο συγκεκριμένα για δύο διανυσματικούς χώρους V και W πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$, που συνδέονται με μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$, θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\hat{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$ του V και μια βάση $\hat{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ του W.

Κάθε στοιχείο της βάσης $\hat{a}$ θα απεικονίζεται σε ένα στοιχείο του W μέσω της f:

$$a_i \xrightarrow{f} f(a_i) \in W \quad \forall i = 1, \dots, \mu.$$

Συνεπώς αν v ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου V τότε αυτό θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $a_1, \dots, a_\mu$ της βάσης $\hat{a}$:

$$v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_\mu a_\mu$$

ενώ μέσω της γραμμικής απεικόνισης f θα ισχύει:

$$f(v) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \dots + \lambda_\mu f(a_\mu)$$

Στο διανυσματικό χώρο W το $\hat{b} = \{b_1, b_2, \dots b_k\}$ είναι βάση και επομένως κάθε στοιχείο του

W μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $b_1, \dots, b_k$. Άρα αφού $f(a_i) \in W$ για $i = 1, \dots, \mu$ θα ισχύει ότι:

$$f(a_1) = \varphi_{11} b_1 + \varphi_{21} b_2 + \dots + \varphi_{k1} b_k$$

$$f(a_2) = \varphi_{12} b_1 + \varphi_{22} b_2 + \dots + \varphi_{k2} b_k$$

$$\vdots$$

$$f(a_\mu) = \varphi_{1\mu} b_1 + \varphi_{2\mu} b_2 + \dots + \varphi_{k\mu} b_k$$

Ορισμός 4.1 Για δύο διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, V και W επί του $\mathbb{F}$, αν $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση, $\hat{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\hat{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ μια διατεταγμένη βάση του W, τότε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1\mu} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \dots & \varphi_{k\mu} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times \mu}$$

του οποίου η i στήλη είναι η $\begin{bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \vdots \\ \varphi_{ki} \end{bmatrix}$ με

$$f(a_i) = \varphi_{1i} b_1 + \varphi_{2i} b_2 + \dots + \varphi_{ki} b_k$$

ονομάζεται πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\hat{a}$ και $\hat{b}$ και συμβολίζεται με $(f : \hat{a}, \hat{b})$

Παράδειγμα 4.1 Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1)$ και οι διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα

$$\hat{a} = \{(1,0),\ (0,1)\} \quad \text{και}$$

$$\hat{b} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}.$$

$$f(1,0) = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$f(0,1) = (-1,1,0) = -1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$$

Ο πίνακας της απεικόνισης θα είναι

$$(f : \hat{a}, \hat{b}) = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4.2 Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 - x_2,\ x_3)$ και οι αντίστοιχες διατεταγμένες βάσεις

$$\hat{a} = \{(1,0),\ (0,1)\} \quad \text{και}$$

$$\hat{b} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}.$$

$f(1,0,0) = (1,0) = 1\cdot(1,0) + 0(0,1)$

$f(0,1,0) = (-1,0) = -1\cdot(1,0) + 0(0,1)$

$f(0,0,1) = (0,1) = 0\cdot(1,0) + 1(0,1)$

Συνεπώς ο πίνακας της απεικόνισης θα είναι

$$(f:\hat{e},\hat{a}) = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 4.1 Έστω διανυσματικοί χώροι V, W και U επί του $\mathbb{F}$ και $\hat{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$, $\hat{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_\kappa\}$ και

$\hat{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\rho\}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες βάσεις τους. Αν $f: V \to W$, $g: V \to W$ και $h: W \to U$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

α) $(f+g:\hat{a},\hat{b}) = (f:\hat{a},\hat{b}) + (g:\hat{a},\hat{b})$

β) $(\lambda f:\hat{a},\hat{b}) = \lambda(f:\hat{a},\hat{b})$

γ) $(h\circ f:\hat{a},\hat{\gamma}) = (h:\hat{b},\hat{\gamma})(f:\hat{a},\hat{b})$

Απόδειξη (α) Από τον ορισμό του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης ισχύει ότι:

$$(f:\hat{a},\hat{b}) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1\mu} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\kappa 1} & \varphi_{\kappa 2} & \dots & \varphi_{\kappa\mu} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{\kappa\times\mu}$$

όπου $f(a_1) = \varphi_{11} b_1 + \varphi_{21} b_2 + \dots + \varphi_{\kappa 1} b_\kappa$
$f(a_2) = \varphi_{12} b_1 + \varphi_{22} b_2 + \dots + \varphi_{\kappa 2} b_\kappa$
$\vdots$
$f(a_\mu) = \varphi_{1\mu} b_1 + \varphi_{2\mu} b_2 + \dots + \varphi_{\kappa\mu} b_\kappa$ (1)

Όμοια $g(a_1) = \rho_{11} b_1 + \rho_{21} b_2 + \dots + \rho_{\kappa 1} b_\kappa$
$g(a_2) = \rho_{12} b_1 + \rho_{22} b_2 + \dots + \rho_{\kappa 2} b_\kappa$
$\vdots$
$g(a_\mu) = \rho_{1\mu} b_1 + \rho_{2\mu} b_2 + \dots + \rho_{\kappa\mu} b_\kappa$ (2)

οπότε

$$(g : \hat{a}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1\mu} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{\kappa 1} & \rho_{\kappa 2} & \dots & \rho_{\kappa\mu} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{\kappa\times\mu}$$

Επειδή για κάθε $a_i, i = 1, \dots, \mu$ θα ισχύει

$$(f+g)(a_i) = f(a_i) + g(a_i) =$$
$$\varphi_{1i} b_1 + \varphi_{2i} b_2 + \dots + \varphi_{\kappa i} b_\kappa + \rho_{1i} b_1 + \rho_{2i} b_2 + \dots + \rho_{\kappa i} b_\kappa =$$
$$(\varphi_{1i} + \rho_{1i}) b_1 + (\varphi_{2i} + \rho_{2i}) b_2 + \dots + (\varphi_{\kappa i} + \rho_{\kappa i}) b_\kappa$$

Συνεπώς

$$(f+g : \hat{a}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}+\rho_{11} & \varphi_{12}+\rho_{12} & \dots & \varphi_{1\mu}+\rho_{1\mu} \\ \varphi_{21}+\rho_{21} & \varphi_{22}+\rho_{22} & \dots & \varphi_{2\mu}+\rho_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\kappa 1}+\rho_{\kappa 1} & \varphi_{\kappa 2}+\rho_{\kappa 2} & \dots & \varphi_{\kappa\mu}+\rho_{\kappa\mu} \end{bmatrix}$$

$= (f : \hat{a}, \hat{b}) + (g : \hat{a}, \hat{b})$

(β) Ισχύει $(\lambda f)(a_i) = \lambda f(a_i) \overset{(1)}{=}$

$$\lambda[\varphi_{1i} b_1 + \varphi_{2i} b_2 + \ldots + \varphi_{ki} b_k] =$$

$$\lambda \varphi_{1i} b_1 + \lambda \varphi_{2i} b_2 + \ldots + \lambda \varphi_{ki} b_k$$

Επομένως

$$(\lambda f : \hat{a}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} \lambda\varphi_{11} & \lambda\varphi_{12} & \ldots & \lambda\varphi_{1n} \\ \lambda\varphi_{21} & \lambda\varphi_{22} & \ldots & \lambda\varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\varphi_{k1} & \lambda\varphi_{k2} & \ldots & \lambda\varphi_{kn} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\,(f : \hat{a}, \hat{b})$$

(γ) Παρόμοια με τα (1) και (2) θα πρέπει

$$h(b_1) = \vartheta_{11}\gamma_1 + \vartheta_{21}\gamma_2 + \ldots + \vartheta_{j1}\gamma_j$$
$$h(b_2) = \vartheta_{12}\gamma_1 + \vartheta_{22}\gamma_2 + \ldots + \vartheta_{j2}\gamma_j$$
$$\vdots$$
$$h(b_k) = \vartheta_{1k}\gamma_1 + \vartheta_{2k}\gamma_2 + \ldots + \vartheta_{jk}\gamma_j$$

και επομένως

$$(h : \hat{b}, \hat{\gamma}) = \begin{bmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{12} & \ldots & \vartheta_{1k} \\ \vartheta_{21} & \vartheta_{22} & \ldots & \vartheta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vartheta_{j1} & \vartheta_{j2} & \ldots & \vartheta_{jk} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{j\times k}$$

Το γινόμενο των πινάκων $(h : \hat{b}, \hat{\gamma})\,(f : \hat{a}, \hat{b})$ θα έχει στοιχείο (i,j) το στοιχείο

$$\sum_{t=1}^{k} \vartheta_{it}\varphi_{tj}$$

Ο πίνακας της σύνθεσης $h \circ f$ θα έχει τη μορφή

$$(h \circ f : \hat{a}, \hat{\gamma}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1\mu} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\xi 1} & \sigma_{\xi 2} & \dots & \sigma_{\xi\mu} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{\xi \times \mu}$$

Επίσης

$$(h \circ f)(a_i) = h(f(a_i)) =$$

$$h(\varphi_{1i} b_1 + \varphi_{2i} b_2 + \dots + \varphi_{ki} b_k) =$$

$$\varphi_{1i} h(b_1) + \varphi_{2i} h(b_2) + \dots + \varphi_{ki} h(b_k)$$

$$= \varphi_{1i} \sum_{t=1}^{\xi} \theta_{t1} \gamma_t + \varphi_{2i} \sum_{t=1}^{\xi} \theta_{t2} \gamma_t + \dots + \varphi_{ki} \sum_{t=1}^{\xi} \theta_{tk} \gamma_t \quad (3)$$

Το στοιχείο (i,j) του πίνακα $(h \circ f : \hat{a}, \hat{\gamma})$ είναι ο συντελεστής του στοιχείου γ_i στην αντίστοιχη εξίσωση j. Από την (3) θα προκύψει ότι το

$$\sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{k} \theta_{it} \varphi_{tj}$$

που συμπίπτει με το στοιχείο (i,j) του γινόμενου των πινάκων

$$(h : \hat{b}, \hat{\gamma})(f : \hat{a}, \hat{b})$$

και αφού αυτό ισχύει για οποιοδήποτε i και j θα πρέπει

$$(h \circ f : \hat{a}, \hat{\gamma}) = (h : \hat{b}, \hat{\gamma})(f : \hat{a}, \hat{b})$$

Έχοντας ορίσει τον πίνακα της απεικόνισης f ως προς κάποια επιλογής βάσεων είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας της είναι αντιστρέψιμος, ενώ ισχύει ότι αν η f είναι ισομορφισμός τότε ο πίνακάς της ως προς <u>κάθε</u> επιλογή βάσεων είναι αντιστρέψιμος. Ένα άμεσο συμπέρασμα των παραπάνω είναι ότι ένας τετραγωνικός πίνακας θα είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι πίνακας ενός ισομορφισμού.

Δεδομένου ότι μπορούμε να ορίσουμε απεικονίσεις της μορφής $f: V \to V$, οπού ο V είναι διανυσματικός χώρος διάστασης μ επί του $\mathbb{F}$, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $1_V = f \circ f^{-1}$ όταν η σύνθεση αυτή ορίζεται. Δεδομένων δύο διατεταγμένων βάσεων $\hat{a}$ και $\hat{b}$ του V μπορούμε να γράψουμε οποιοδήποτε $\upsilon \in V$ ως

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_\mu a_\mu.$$

και
$$\upsilon = \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_i b_i = \varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 + \ldots + \varphi_\mu b_\mu.$$

Αν $A = (1_V : \hat{a}, \hat{b})$ ο πίνακας της απεικόνισης 1_V ως προς τις βάσεις $\hat{a}$ και $\hat{b}$ του διανυσματικού χώρου V τότε ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_\mu \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\mu \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας A ονομάζεται πίνακας αλλαγής βάσης

Παράδειγμα 4.3 (1) Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_3, x_1 + x_2)$
και η $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με
$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 0, x_1)$$

Οι πίνακες των δύο απεικονίσεων ως προς τη βάση $\hat{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ με $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ και $e_3 = (0,0,1)$ είναι:

$$f(1,0,0) = (1,0,1) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$f(0,1,0) = (-2,0,1) = -2(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$f(0,0,1) = (0,1,0) = 0\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$$

$$(f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(1,0,0) = (1,0,1) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$g(0,1,0) = (1,0,0) = 1\cdot(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$g(0,0,1) = (1,0,0) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$$

$$(g : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από το Παράδειγμα 4.1 έπεται ότι

$$(f+g : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(g \circ f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1+1.0+1.1 & \vdots & 1.(-2)+1.0+1.1 & \vdots & 1.0+1.1+1.0 \\ 0.1+0.0+0.1 & \vdots & 0.(-2)+0.0+0.1 & \vdots & 0.0+0.1+0.0 \\ 1.1+0.0+0.1 & \vdots & 1.(-2)+0.0+0.1 & \vdots & 1.0+0.1+0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(Άσκηση υπολογίστε τον πίνακα της απεικόνισης $f \circ g$ αν αυτή ορίζεται.)

(2) Έστω η βάση $\hat{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και η βάση $\hat{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ όπου $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1)$ και $a_3 = (0,0,1)$. Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\hat{e}$ στην $\hat{a}$

$(1_{\mathbb{R}^3} : \hat{e}, \hat{a})$ θα είναι ως εξής

$$1_{\mathbb{R}^3}(e_1) = 1_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) = (1,0,0) = 0\cdot(1,1,1) + 1\cdot(1,0,1) - 1\cdot(0,0,1)$$

$$1_{\mathbb{R}^3}(e_2) = 1_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) = (0,1,0) = 1\cdot(1,1,1) + (-1)(1,0,1) + 0\cdot(0,0,1)$$

$$1_{\mathbb{R}^3}(e_3) = 1_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) = (0,0,1) = 0\cdot(1,1,1) + 0\,(1,0,1) + 1\cdot(0,0,1)$$

Επομένως

$$(1_{\mathbb{R}^3}, \hat{e}, \hat{a}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\hat{e}$ στην $\hat{a}$.

4.1. Τάξη ενός $\mu\times\nu$ πίνακα.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$, που αποτελείται από μ γραμμές και ν στήλες. Ο πίνακας μπορεί να γραφτεί ως

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_\nu \end{bmatrix}$$

όπου r_i για $i=1,2,\dots,\mu$ είναι η i γραμμή του πίνακα A ενώ c_j για $j=1,2,\dots,\nu$ είναι η j στήλη του πίνακα A. Μέσω των γραμμών και αντίστοιχα των στηλών του πίνακα A μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο που παράγεται από τις γραμμές του A : $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu \rangle$ που θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{1\times\mu}$ και συμβολίζεται με Γ_A, και αντίστοιχα τον χώρο που παράγεται από τις στήλες του A : $\langle c_1, c_2, \dots, c_\nu \rangle$ που θα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{\nu\times 1}$ και συμβολίζεται με Σ_A. Οι δύο αυτοί διανυσματικοί χώροι αποδεικνύεται ότι έχουν την ίδια διάσταση, δηλαδή ισχύει

$$\dim \Gamma_A = \dim \Sigma_A.$$

Ορισμός 4.2 Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Τότε ο ακέραιος $\dim \Gamma_A = \dim \Sigma_A$ λέγεται η τάξη του πίνακα A και συμβολίζεται με rank(A) ή rk(A)

Λήμμα 4.1 Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $B \in \mathbb{F}^{\mu\times\mu}$, $\Gamma \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε

(α) $\dim_{\mathbb{F}} \Sigma_A = \dim_{\mathbb{F}} \Sigma_{BA}$

(β) $\dim_{\mathbb{F}} \Sigma_A = \dim_{\mathbb{F}} \Sigma_{A\Gamma}$

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις
$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1}$, $\gamma_B : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ και
$\gamma_\Gamma : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$

Επειδή οι πίνακες B και Γ είναι αντιστρέψιμοι, θα είναι αντιστρέψιμες και οι απεικονίσεις γ_B και γ_Γ, δηλαδή θα είναι ισομορφισμοί. Μέσω των απεικονίσεων θα ισχύει $\Sigma_{BA} = \mathrm{Im}\, \gamma_{BA} = \gamma_A(\gamma_B(\mathbb{F}^{\mu\times 1}))$ και επειδή η γ_B είναι επί θα είναι $\gamma_B(\mathbb{F}^{\mu\times 1}) = \mathbb{F}^{\mu\times 1}$. Άρα $\gamma_A(\gamma_B(\mathbb{F}^{\mu\times 1})) = \gamma_A(\mathbb{F}^{\mu\times 1}) = \mathrm{Im}\, \gamma_A = \Sigma_A$

Όμοια επειδή γ_Γ είναι ισομορφισμός

$$\Sigma_{\Gamma A} = \gamma_\Gamma(\gamma_A(\mathbb{F}^{\mu\times 1})) \simeq \gamma_A(\mathbb{F}^{\mu\times 1}) = \mathrm{Im}\, \gamma_A = \Sigma_A$$

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.1 είναι ότι

$$\dim_{\mathbb{F}} \Sigma_A = \dim_{\mathbb{F}} \Sigma_{BA\Gamma}$$

Θεώρημα 4.2 Δύο πίνακες A και B, $\mu\times\nu$, είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν $rank(A) = rank(B)$

Απόδειξη Η απόδειξη παραλείπεται

Παράδειγμα 4.4. (α) Εύρεση τάξης ενός πίνακα.
Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών θα έχουμε

$$r_3 \longrightarrow r_3 - 3r_1 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$r_3 \longrightarrow r_3 - 4r_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε $rank(A) = 2$.

(β) Θα εξετάσουμε αν ο πίνακας A του παραδείγματος είναι ισοδύναμος με τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον B

$$r_2 \longrightarrow r_2 + 3r_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$r_3 \longrightarrow r_3 + 2r_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$r_3 \longrightarrow r_3 - r_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

άρα $rank(B) = 2$. Από το Θεώρημα 4.2, αφού $rank(A) = rank(B)$ οι A και B είναι ισοδύναμοι.

Η τάξη του πίνακα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

(α) Αν $A, B \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$ τότε

$$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

(β) Αν $A \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$ και $B \in \mathbb{F}^{\nu \times \kappa}$, τότε

$$rank(A) + rank(B) - \nu \leq rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$$

(γ) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, ο πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $rank(A) = \nu$.

(δ) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ τότε

$$rank(A) = rank(A')$$

Ορισμός 4.3 Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ θα λέγονται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ τέτοιος ώστε

$$PAP^{-1} = B.$$

Παράδειγμα 4.5 Θα εξετάσουμε αν οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν είναι όμοιοι θα υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2\times2}$ τέτοιος ώστε

$$PAP^{-1} = B = I_2.$$

Όμως

$$P^{-1}PAP^{-1} = P^{-1}I_2 \quad \overset{P^{-1}P = I_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$AP^{-1} = I_2$$

$$AP^{-1}P = I_2P$$

$$A = I_2$$

το οποίο προφανώς δεν ισχύει.