2. Διανυσματικοί Χώροι.

Ορισμός 2.1 Εστω το σύνολο $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Ως διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ ορίζουμε ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με μια απεικόνιση

$$V \times V \longrightarrow V, \quad (v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2$$

που λέγεται πρόσθεση και μια απεικόνιση

$$\mathbb{F} \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, v) \longrightarrow \lambda v$$

που λέγεται πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα στοιχείο του V, έτσι ώστε να ισχύουν:

(1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$

(2) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3), \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$

(3) υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$, με την ιδιότητα

$$v + 0 = 0 + v = v \text{ για κάθε } v \in V.$$

(4) για κάθε $v \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $-v \in V$ με την ιδιότητα

$$v + (-v) = (-v) + v = 0$$

(5) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$ και $v_1, v_2 \in V$

(6) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $v \in V.$

(7) $(\lambda \mu) v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $v \in V.$

(8) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$, όπου 1 μονάδα του συνόλου $\mathbb{F}$.

Παρατήρηση 2.1 Αν V ένας διανυσματικός χώρος και $0 \in V$, τότε αυτό είναι το μοναδικό στοιχείο του V με την ιδιότητα

$$0 + v = v + 0 = v \quad , \quad \forall v \in V.$$

Έστω $0'$ ένα άλλο στοιχείο του V με την ίδια ιδιότητα:

$$0' + v = v + 0' = v \quad \text{για κάθε } v \in V$$

Τότε θα πρέπει $0' = 0' + 0 = 0$. Το $0 \in V$ λέγεται μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου V και συμβολίζεται με 0_V.

Παρομοίως το στοιχείο $(-v) \in V$ είναι μοναδικό για κάθε $v \in V$. Πράγματι έστω w ένα στοιχείο με την ιδιότητα

$$v + w = w + v = 0_V$$

Τότε $-v = -v + 0_V = -v + (v + w) = (-v + v) + w = w$.

Παράδειγμα 2.1 Το σύνολο $\mathbb{R}^k$ των διατεταγμένων k-άδων (ή των διανυσμάτων διάστασης k) είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Πράγματι

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) + (b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_k+b_k) \in \mathbb{R}^k$$

και αντίστοιχα αν $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_k) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_k) \in \mathbb{R}^k$$

Επιπλέον $0_{\mathbb{R}^k} = (0, 0, \dots 0)$ και αν

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k \text{ τότε και}$$

το $-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_k) \in \mathbb{R}^k$ και ισχύει ότι $-a + a = a + (-a) = 0_{\mathbb{R}^k}$.

Εύκολα αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες ενός διανυσματικού χώρου.

Παράδειγμα 2.2

α) Το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, εφοδιασμένο με τη συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων και τον πολλαπλασιασμό μιας πραγματικής συνάρτησης με ένα αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ένας (πραγματικός) διανυσματικός χώρος.

β) Το σύνολο των $\mu \times \nu$ πινάκων επί του $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{\mu \times \nu}$) με τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$ με ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

γ) Το σύνολο $\mathbb{R}_\nu[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ν με πραγματικούς συντελεστές είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 2.1

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ έχουμε $\lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(2) για κάθε $v \in V$ έχουμε $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$.

(3) Αν $\lambda v = 0_V$, τότε η $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$ ή $v = 0_V$.

(4) για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v \in V$, ισχύει

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$$

<u>Απόδειξη:</u> (1) Ισχύει ότι

$$\lambda(0_V) = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V.$$

Έστω ότι $\lambda 0_V = w$. Τότε θα πρέπει $w + w = w$. Εξ' ορισμού υπάρχει το $-w$ για το οποίο

$$(w+w) + (-w) = w + (-w) = 0_V.$$

Από την ιδιότητα (2) της πρόσθεσης (ορισμός 2.1) ισχύει ότι

$$0_V = (w+w) + (-w) = w + (w + (-w)) =$$
$$w + 0_V = w$$

(2) Ισχύει ότι $0_{\mathbb{F}} \cdot v = (0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}})v$. Έστω $0_{\mathbb{F}} \cdot v = w$. Τότε όμοια με το (1) θα πρέπει $w + w = w$. Ομοίως με πριν δείχνουμε ότι τελικά $w = 0_V$.

(3) Έστω $\lambda v = 0_V$. Για $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$ ισχύει προφανώς. Αν $\lambda \neq 0_{\mathbb{F}}$ τότε πολλαπλασιάζοντας με το $1/\lambda$ θα έχουμε $(1/\lambda) \cdot \lambda v = (1/\lambda) \cdot 0_V \Leftrightarrow (1/\lambda \cdot \lambda)v = 0_V \Leftrightarrow$
$1 \cdot v = 0_V \Leftrightarrow v = 0_V$.

(4) Αφήνεται ως άσκηση.

Ορισμός 2.2 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Ένα υποσύνολο Z του V, θα λέγεται υπόχωρος του V, αν ισχύουν τα ακόλουθα

(1) $0_V \in Z$

(2) αν $v, w \in Z$, τότε και $v+w \in Z$

(3) αν $v \in Z$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε το $\lambda v \in Z$

Από τον ορισμό 2.2 προκύπτει άμεσα ότι αν ισχύουν τα (1)-(3) τότε ο υπόχωρος Z κληρονομεί όλες τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου V, όπως αυτές προκύπτουν από τον ορισμό 2.1. Συνεπώς και ο Z είναι ένας διανυσματικός χώρος ως προς την ίδια πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Αν ο Z είναι υπόχωρος του V συμβολίζουμε με $Z \leq V$.

Παράδειγμα 2.3 Για το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ το υποσύνολο

$$Z = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$ είναι ένας

υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι

(1) $0_{\mathbb{R}^2} \in Z$

(2) έστω τυχόντα $z_1, z_2 \in Z$ με $z_1 = (x_1, 0)$ και $z_2 = (x_2, 0)$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Τότε
$$z_1 + z_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0+0) = (x_1 + x_2, 0) \in Z$$, καθώς $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(3) έστω $z \in Z$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε για $z = (x_1, 0)$
$$\lambda \cdot z = \lambda \cdot (x_1, 0) = (\lambda x_1, \lambda 0) = (\lambda x_1, 0) \in Z$$
καθώς $\lambda x_1 \in \mathbb{R}$.

Τα σύνολα

$$X = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$ και

$$Y = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

μπορούν εύκολα να δειχθούν ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση 2.2 Για κάθε διανυσματικό χώρο V είναι προφανές ότι ο V είναι και υπόχωρος του εαυτού του όπως επίσης και το σύνολο $\{0_V\}$. Επιπλέον καθώς ο V είναι διανυσματικός χώρος επί του συνόλου $\mathbb{F}$ τότε για $a \in V$ το σύνολο

$$\langle a \rangle = \{\lambda a \in V \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$$

είναι υπόχωρος του V. Τέλος αν A και B είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V τότε και η τομή τους $A \cap B$ είναι υπόχωρος του V. Γενικότερα ισχύει:

Πρόταση 2.2 Έστω Y ένα μη κενό σύνολο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε και η τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V:

$$Y = \{A_1, A_2, \dots A_k \mid A_j \leq V,\ j = 1, \dots k\}.$$

τότε $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_k \leq V$.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση.

Για ένα διανυσματικό χώρο V επί του συνόλου $\mathbb{F}$ και δύο υπόχωρους αυτού A και B μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο

$$A + B = \{\omega \in V : \omega = a + b \text{ με } a \in A \text{ και } b \in B\}$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο αυτό είναι υπόχωρος του V και ονομάζεται άθροισμα των A και B. Το άθροισμα αυτό μπορεί να επεκταθεί σε περισσότερους από δύο υπόχωρους του V:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \{ w \in V : w = a_1 + a_2 + \dots + a_k ,\ a_i \in A_i ,\ i = 1, \dots, k \}$$

Ορισμός 2.3 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και Z, W δύο υπόχωροι αυτού. Αν $V = Z + W$ και $Z \cap W = \{0_V\}$, τότε ο V λέγεται το ευθύ άθροισμα των υποχώρων Z και W και συμβολίζεται με

$$V = Z \oplus W.$$

Πρόταση 2.3 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και Z, W δύο υπόχωροι του. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(1) $V = Z \oplus W$

(2) κάθε στοιχείο του $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $v = z + w$, $z \in Z$ και $w \in W$. (Δηλαδή αν $v = z + w = z' + w'$ με $z, z' \in Z$ και $w, w' \in W$ τότε $z = z'$ και $w = w'$).

Απόδειξη. Έστω $V = Z \oplus W$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι κάθε $v \in V$ γράφεται ως άθροισμα $v = z + w$ $z \in Z$ και $w \in W$.
Έστω ότι υπάρχουν και $z' \in Z$ και $w' \in W$ τέτοια ώστε $v = z' + w'$. Τότε θα ισχύει ότι

$$z + w = z' + w' \Leftrightarrow$$
$$z - z' = w' - w$$

Συνεπώς το στοιχείο $z - z' = w' - w$ θα πρέπει ανήκει και στο Z και στο W, δηλαδή

$$z - z' = w' - w \in Z \cap W$$

Όμως το μοναδικό στοιχείο της τομής είναι το 0_V. Επομένως $z - z' = 0_V$ και $w' - w = 0_V \Rightarrow z = z'$ και $w = w'$

Αντιστρόφως: Έστω ότι κάθε $v \in V$ γράφεται μοναδικά ως $v = z + w$, $z \in Z$ και W. Έστω ένα στοιχείο $v = z + w \in Z \cap W$. Τότε το v μπορεί να γραφτεί $v = v + 0_W = 0_Z + v$. (Ωστόσο ισχύει ότι $0_V = 0_Z = 0_W$) Επειδή το v γράφεται μοναδικά ως $v = z + w$ θα πρέπει $z = 0_V$ και $w = 0_W$ οπότε τελικά $v = 0_V$ και τελικά $Z \cap W = \{0_V\}$. επομένως $V = Z \oplus W$.

Ορισμός 2.4: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και Z ένα μη κενό υποσύνολό του. Ένα στοιχείο $v \in V$ θα λέγεται γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Z, αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{F}$ και $z_1, z_2, \ldots, z_k \in Z$ τέτοια ώστε

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_k z_k$$

Θεώρημα 2.1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και Z ένα μη κενό υποσύνολό του. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του Z είναι ένας υπόχωρος του V.

__Απόδειξη__ Αν $<Z>$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του Z, επειδή $Z \neq \emptyset$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $a \in Z$. Το $0_F \cdot a$ θα ανήκει στο $<Z>$. Όμως $0_F \cdot a = 0_V$, συνεπώς $0_V \in <Z>$. Έστω w_1 και $w_2 \in <Z>$. Τότε υπάρχουν $\lambda_i, \varphi_j \in \mathbb{F}$ και $z_i, x_j \in Z$ για $i = 1, \dots, k$ και $j = 1, \dots, \mu$ τέτοια ώστε:

$$w_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i \quad \text{και}$$

$$w_2 = \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j x_j$$

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i + \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j x_j$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Z. Επιπλέον για $\xi \in \mathbb{F}$ τότε

$$\xi w_1 = \xi \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i = \sum_{i=1}^{k} \xi \lambda_i z_i$$

είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Z. Επομένως από τον ορισμό 2.2. ο $<Z>$ είναι υπόχωρος του V.

Σημειώνεται ότι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών, $<Z>$, στοιχείων του Z λέγεται υπόχωρος του V που παράγεται από το Z ή γραμμική θήκη του Z στον V. Επίσης λέμε ότι το σύνολο Z παράγει τον χώρο V ή ότι το σύνολο Z είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V. Τέλος αν το σύνολο Z είναι πεπερασμένο, λέμε ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο των υποχώρων του V που περιέχουν το Z

$$S_Z = \{A \in P(V) \mid A \leq V \text{ και } Z \subseteq A\}$$

Μπορούμε να ορίσουμε την τομή όλων των υποχώρων του V που περιέχουν το Z

$$Z^* = \bigcap_{A \in S_Z} A$$

Το σύνολο S_Z είναι μη κενό αφού περιέχει τουλάχιστον το V. Αποδεικνύεται ότι αν $Z \neq \emptyset$ τότε

$$\langle Z \rangle = Z^*$$

Πρόταση 2.4 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και Z ένα μη κενό υποσύνολό του. Τότε $\langle Z \rangle = Z^*$

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle Z \rangle \subseteq Z^*$ και $Z^* \subseteq \langle Z \rangle$.

Έστω $z \in \langle Z \rangle$. Τότε υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{F}$ και $x_i \in Z$ για $i = 1, \dots, k$ τέτοια ώστε

$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

Επειδή κάθε σύνολο A της τομής Z^* περιέχει το Z (από τον ορισμό του S_Z) έπεται ότι

$$x_i \in Z^* \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Επειδή ο Z^* είναι υπόχωρος του V τότε και

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in Z^* \Rightarrow$$

$$z \in Z^*$$

Επομένως $<Z> \subseteq Z^*$.
Επιπλέον, από τον ορισμό του $<Z>$ προκύπτει ότι $Z \subseteq <Z>$, αφού αν $z \in Z$ τότε $z = 1_{\mathbb{F}} \cdot z$.
Άρα ο $<Z>$ είναι ένας υπόχωρος του V που περιέχει το Z. Άρα

$$<Z> \in S_Z \quad \text{και}$$

$$Z^* \subseteq <Z>.$$

Τελικά αφού $<Z> \subseteq Z^*$ και $Z^* \subseteq <Z>$ πρέπει $<Z> = Z^*$

Ορισμός 2.5 Ορίζουμε ως υπόχωρο του V που παράγεται από το $\emptyset$ τον $\{0_V\}$, δηλαδή

$$<\emptyset> = \{0_V\}.$$

2.1 Βάση Διανυσματικού Χώρου.

Ας υποθέσουμε ότι $\Gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου V (επί του συνόλου $\mathbb{F}$). Αν μπορούμε να γράψουμε το w_k ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων, δηλαδή υπάρχουν μ_j για $j = 1, 2, \ldots k-1$ τέτοια ώστε

$$w_k = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j w_j, \quad \mu_j \in \mathbb{F}$$

Τότε κάθε άλλο $x \in V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$. Από τον ορισμό θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ τέτοια

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i =$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k$$

Όμως $w_k = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j w_j = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_{k-1} w_{k-1}$

Αντικαθιστώντας θα πρέπει

$$x = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_{k-1} w_{k-1} +$$

$$\lambda_k (\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_{k-1} w_{k-1})$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_k \mu_1) w_1 + (\lambda_2 + \lambda_k \mu_2) w_2 + \dots +$$

$$(\lambda_{k-1} + \lambda_k \mu_{k-1}) w_{k-1}$$

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε το x ως γραμμικό συνδυασμό των $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$. Συνεπώς το w_k δεν είναι απαραίτητο για την περιγραφή των στοιχείων του διανυσματικού χώρου V.

Πρόταση 2.5 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και $w_1, w_2, \dots, w_k$ στοιχεία του V με $k \geq 2$. Ένα από τα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k = 0_V.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο i το w_i μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή

$$\omega_i = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \dots + \lambda_{i-1}\omega_{i-1} + \lambda_{i+1}\omega_{i+1} + \dots + \lambda_k\omega_k.$$

Τότε $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \dots + \lambda_{i-1}\omega_{i-1} + (-1)\omega_i + \lambda_{i+1}\omega_{i+1} + \dots + \lambda_k\omega_k = 0_V$.

Δηλαδή για $\lambda_i = -1$ έχουμε το ζητούμενο.

Αντιστρόφως Έστω ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \dots + \lambda_k\omega_k = 0_V$$

Από υπόθεση για κάποιο i το $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{F}}$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$-\lambda_i\omega_i = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \dots + \lambda_{i-1}\omega_{i-1} + \lambda_{i+1}\omega_{i+1} + \dots + \lambda_k\omega_k.$$

Αφού $\lambda_i \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε με $-\lambda_i$ οπότε:

$$\omega_i = \frac{\lambda_1}{-\lambda_i}\omega_1 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_i}\omega_2 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i}\omega_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i}\omega_{i+1} + \dots + \frac{\lambda_k}{-\lambda_i}\omega_k$$

Συνεπώς το ω_i είναι γραμμικός συνδυασμός των $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots \omega_k$.

Η παραπάνω πρόταση μας οδηγεί στην έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας:

Ορισμός 2.5 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και $w_1, w_2, \ldots, w_k$ στοιχεία του V. Τα $w_1, w_2, \ldots, w_k$ θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{F}$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_k w_k = 0_V.$$

Σε διαφορετική περίπτωση τα $w_1, w_2, \ldots w_k$ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα. (Τα $w_1, w_2, \ldots, w_k$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν κάθε σχέση της μορφής

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_k w_k = 0_V \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0_V.)$$

Παράδειγμα 2.4 Θεωρούμε τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Θα εξετάσουμε αν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αν είναι θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξισώσεων

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad (1)$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$2(\lambda_2 + 2\lambda_3) - 4\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda_2 + \cancel{4\lambda_3} - \cancel{4\lambda_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$

Επομένως $\lambda_1 = 2\lambda_3$ και

(1) $\Rightarrow -2\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που επαληθεύεται για οποιοδήποτε $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

Επομένως για $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ και επομένως υπάρχουν μη μηδενικά λ_1, λ_3 ώστε η σχέσεις (1) και (2) να ισχύουν ($\lambda_2 = 0$)

Από τον ορισμό 2.5 μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ ενός διανυσματικού χώρου V επί του F, είναι γραμμικά εξαρτημένα αν το 0_V μπορεί να γραφτεί ως μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Προφανώς αν ο μοναδικός τρόπος που μπορεί να γραφτεί το 0_V ως γραμμικός συνδυασμός των $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ είναι ο τετριμμένος τότε τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η έννοια της γραμμικής εξάρτησης - ανεξαρτησίας επεκτείνεται και σε πεπερασμένα μη κενά υποσύνολα του διανυσματικού χώρου V (επί του F).

Πιο συγκεκριμένα αν $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι ένα υποσύνολο του V, το X θα λέγεται γραμμικά εξαρτημένο (αντίστοιχα ανεξάρτητο) αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (αντίστοιχα ανεξάρτητα). Τέλος ένα άπειρο υποσύνολο X του V θα λέγεται γραμμικά εξαρτημένο (αντίστοιχα ανεξάρτητο) αν έχει μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο $S \subseteq X$ που είναι γραμ-

μικά εξαρτημένο (αντίστοιχα ανεξάρτητο).
Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι αν X είναι ένα
μη κενό πεπερασμ.: γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο του V, τότε και
κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του V που το
περιέχει ($X \subseteq S$) θα είναι γραμμικά εξαρτημένο.
Αντίστοιχα αν το X είναι μη κενό πεπερασμένο
γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, τότε και κάθε
υποσύνολο του X θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο

Ορισμός 2.6 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και
B ένα υποσύνολό του. Το B θα λέγεται βάση
του V αν
(α) το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο
(β) το σύνολο B παράγει τον χώρο V, δηλαδή
$\langle B \rangle = V$.

Παράδειγμα 2.5 Θεωρούμε τα στοιχεία $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$
και $e_3 = (0, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^3$. Αν $x = (x_1, x_2, x_3)$
είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$) τότε

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Συνεπώς $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Επιπλέον εύκολα
μπορεί να δειχθεί ότι τα e_1, e_2, e_3 είναι
γραμμικά ανεξάρτητα: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow$$

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

Δηλαδή όλα τα λ_i, $i=1,2,3$ είναι 0. Άρα το σύνολο $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Το B συνήθως αναφέρεται και ως κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^k$, $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$ κ.ο.κ. έως $e_k=(0,\dots,0,1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^k$.

2.2 Διάσταση Διανυσματικού Χώρου.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι αν ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ έχει μια βάση με κ στοιχεία, τότε κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη και έχει κ στοιχεία. Επιπλέον αν ο V παράγεται από κ στοιχεία, τότε κάθε υποσύνολό του που περιέχει κ+1 στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο. Με αυτά οδηγούμαστε και στο επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.2. Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πεπερασμένα παραγόμενος επί του $\mathbb{F}$. Τότε ο V έχει τουλάχιστον μια βάση πεπερασμένη.

<u>Απόδειξη</u> Αν $V\neq\{0_V\}$, υπάρχει $a\in V$ με $a\neq 0_V$. Το a είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως θα υπάρχει μια πεπερασμένη βάση του V (έστω B), στην οποία θα ανήκει το $a\in B$. Για $V=\{0_V\}$ τότε βάση του V είναι το κενό σύνολο, καθώς $V=\langle\varnothing\rangle$.

Παρατήρηση 2.3 Για ένα διανυσματικό χώρο V που είναι πεπερασμένα παραγόμενος επί του $\mathbb{R}$, με $V \neq \{0_V\}$ και $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του V θα ισχύει $V = \langle Z \rangle$. Ένας τρόπος να βρεθεί μια βάση του V που θα είναι υποσύνολο του Z έχει ως εξής:

(α) Αν το Z είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτό θα αποτελεί και τη ζητούμενη βάση καθώς το Z παράγει τον V.

(β) Αν το Z δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε κάποιο από τα στοιχεία του Z μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, έστω το z_k (χωρίς βλάβη της γενικότητας)

$$z_k = \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \dots + \xi_{k-1} z_{k-1}$$

Το σύνολο $\{z_1, z_2, \dots, z_{k-1}\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V. Αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο βρήκαμε το ζητούμενο σύνολο που αποτελεί βάση του V. Σε διαφορετική περίπτωση επαναλαμβάνουμε το βήμα αυτό αφαιρώντας ένα ακόμα στοιχείο του συνόλου κ.ο.κ, έως ότου καταλήξουμε σε ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο που θα είναι και η βάση του χώρου.

Από την παρατήρηση 2.2 προκύπτει ότι κάθε βάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι πεπερασμένη, και ότι αν B_1 και B_2 είναι δύο διαφορετικές βάσεις του V, τότε αυτές θα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Συνεπώς το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης ενός διανυσματικού χώρου V δεν εξαρτάται από την ίδια τη βάση στην οποία ανήκουν αλλά από το διανυσματικό χώρο V.

Ορισμός 2.7 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πεπερασμένα παραγόμενος επί του $\mathbb{F}$. Ο αριθμός των στοιχείων μιας βάσης του V, ονομάζεται διάσταση του χώρου και συμβολίζεται με $\dim_{\mathbb{F}} V$.

Παράδειγμα 2.6 (α) Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ είδαμε στο παράδειγμα 2.5 ότι τα στοιχεία $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ και $e_3=(0,0,1)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ και το πλήθος τους (3) δίνει και τη διάσταση του $\mathbb{R}^3$. Επομένως

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

(β) Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι για τον $\mathbb{R}^n$ τα στοιχεία $e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$ ... $e_n=(0,0,\ldots,0,1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ και επομένως $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(γ) Για τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_\nu[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού το πολύ ν, τα πολυώνυμα:

$$p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=x^2, \ldots, p_\nu(x)=x^\nu$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}_\nu[x]$ και μπορεί να δειχθεί ότι παράγουν τον $\mathbb{R}_\nu[x]$. Συνεπώς αποτελούν βάση του χώρου και ισχύει

$$\dim \mathbb{R}_\nu[x] = \nu+1.$$

2.3 Ιδιότητες Διάστασης Διανυσματικού Χώρου και Βάσεων.

Πρόταση 2.6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$ και W ένας υπόχωρός του. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\dim_{\mathbb{F}} W \leq \dim_{\mathbb{F}} V$

(β) $W = V$ αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V$.

Απόδειξη (α) Έστω B_1 μια βάση του W. Το B_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V και επομένως θα υπάρχει βάση B_2 του V τέτοια ώστε $B_1 \subseteq B_2$. Άρα αναγκαστικά $\dim_{\mathbb{F}} W \leq \dim_{\mathbb{F}} V$, καθώς αφού $B_1 \subseteq B_2$ το πλήθος των στοιχείων του B_1 είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των στοιχείων του B_2.

(β). Αν $W = V$ τότε προφανώς $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V$. Θα εξετάσουμε το αντίστροφο. Έστω $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V$, και B_1 μια βάση του W. Τότε υπάρχει μια βάση B_2 του V με $B_1 \subseteq B_2$. Το πλήθος των στοιχείων των B_1 και B_2 είναι $\dim_{\mathbb{F}} W$ και $\dim_{\mathbb{F}} V$ αντίστοιχα, δηλαδή B_1 και B_2 έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Άρα το B_1 είναι βάση του V. (και το B_2 είναι βάση του W) Επομένως $W = V$.

Θεώρημα 2.3 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και U, W δύο υπόχωροί του πεπερασμένης διάστασης. Τότε

(α) Ο υπόχωρος $U + W$ έχει πεπερασμένη διάσταση

(β) $\dim_{\mathbb{F}}(U + W) = \dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} W - \dim_{\mathbb{F}}(U \cap W)$

Απόδειξη Η τομή $U \cap W$ είναι υπόχωρος του V, αλλά και των U και W, και U, W είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε και ο $U \cap W$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Έστω μια βάση $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ του $U \cap W$. Η βάση αυτή μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση

$$B_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots u_j\} \text{ του } U$$

και αντίστοιχα σε μια βάση

$$B_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_k, w_1, w_2, \dots, w_i\} \text{ του } W.$$

Θα δείξουμε ότι η τομή των δύο βάσεων $B_1 \cap B_2$ είναι βάση του $U + W$. Κάθε στοιχείο του $U + W$ γράφεται ως $z = u + w$, $u \in U$ και $w \in W$. Κάθε στοιχείο $u \in U$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης B_1:

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} u_1, \dots + \lambda_{k+j} u_j$$

Ομοίως για το $w \in W$ και τα στοιχεία της B_2.

$$w = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_k x_k + \xi_{k+1} w_1 + \dots + \xi_{k+i} w_i$$

Επομένως (προσθέτοντας κατά μέλη) το $u + w$ θα είναι:

$$z = u + w = (\lambda_1 + \xi_1) x_1 + (\lambda_2 + \xi_2) x_2 + \dots + (\lambda_k + \xi_k) x_k +$$

$$\lambda_{k+1} u_1 + \dots + \lambda_{k+j} u_j + \xi_{k+1} w_1 + \dots + \xi_{k+i} w_i$$

Δηλαδή το z είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_j, w_1, w_2, \dots, w_i\}$. Το σύνολο αυτό παράγει τον $U + W$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός ίσος με 0_V.

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_k x_k + \pi_1 u_1 + \pi_2 u_2 + \ldots + \pi_j u_j + \rho_1 \omega_1 + \ldots + \rho_i \omega_i = 0.$$

Λύνοντας ως προς τα ω θα έχουμε

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_k x_k + \pi_1 u_1 + \pi_2 u_2 + \ldots + \pi_j u_j = -\rho_1 \omega_1 - \rho_2 \omega_2 - \ldots - \rho_i \omega_i = z_0 \quad (1).$$

Το z_0 θα ανήκει και στον U και στον W άρα και στην τομή $U \cap W$. Η σχέση 1 μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$z_0 = \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \ldots + \varphi_k x_k = -\rho_1 \omega_1 - \rho_2 \omega_2 - \ldots - \rho_i \omega_i$$

$$\Rightarrow \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \ldots + \varphi_k x_k + \rho_1 \omega_1 + \ldots + \rho_i \omega_i = 0_V.$$

Το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i\}$ είναι μια βάση του W. Επομένως

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_i = 0_{\mathbb{F}}$$

Άρα το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_j, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i\}$ είναι βάση του $U+W$.

$$\dim_{\mathbb{F}} U+W = k+j+i$$

$\dim_{\mathbb{F}} U = k+j$, $\dim_{\mathbb{F}} W = k+i$ και $\dim_{\mathbb{F}} U \cap W = k$. Συνεπώς

$$\dim_{\mathbb{F}} U+W = \dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} W - \dim_{\mathbb{F}} U \cap W$$

Θεώρημα 24. Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του V. Αν $U_p = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε υπάρχει ένα υποσύνολο B_p του B με $k-p$ στοιχεία, έτσι ώστε $V = \langle B_p \cup U_p \rangle$.
Επιπλέον αν το σύνολο B είναι μια βάση του V τότε και το σύνολο $B_p \cup U_p$ είναι βάση του V.

Απόδειξη Θα πρέπει $p \leq k$ (διαφορετικά το B θα είναι γραμμικά εξαρτημένο)
Για $p=1$ θα είναι $U_1 = \{u_1\}$ Το U_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο άρα $u_1 \neq 0_V$. Επειδή το $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ παράγει τον V θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ τέτοια ώστε

$$u_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k$$

Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0_{\mathbb{F}}$ τότε $u_1 = 0_V$. Άτοπο. Άρα για τουλάχιστον ένα $i : 1 \leq i \leq k$ θα είναι $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{F}}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$. Λύνοντας ως προς b_1 θα έχουμε ότι

$$b_1 = (1/\lambda_1) u_1 - (\lambda_2/\lambda_1) b_2 - \dots - (\lambda_k/\lambda_1) b_k$$

οπότε $V = \langle \{u_1\} \cup \{b_2, b_3, \dots, b_k\} \rangle$

$$= \langle U_1 \cup \{b_2, b_3, \dots, b_k\} \rangle$$

Έστω $p > 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $p-1$, και θα δείξουμε ότι ισχύει και για p. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $B_{p-1} \subseteq \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ με

$B_{p-1} = \{b_1', b_2', \dots, b_{k-(p-1)}'\}$ και

$V = \langle \{u_1, u_2, \ldots, u_{\rho-1}\} \cup \{b_1', b_2', \ldots, b_{k-(\rho-1)}'\} \rangle$

Έστω $u_\rho \in V$ θα πρέπει

$$u_\rho = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{\rho-1} u_{\rho-1} + \varphi_1 b_1' + \varphi_2 b_2' + \ldots + \varphi_{k-(\rho-1)} \cdot b_{k-(\rho-1)}'$$

Αν $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{k-(\rho-1)} = 0_F$ τα $u_1, u_2, \ldots, u_{\rho-1}, u_\rho$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άτοπο. Άρα υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, k-(\rho-1)\}$ για το οποίο $\varphi_i \neq 0_F$

Όπως και πριν λύνοντας ως προς b_i' θα έχουμε

$$b_i' = (1/\varphi_i)\left(u_\rho - \lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_{\rho-1} u_{\rho-1} - \varphi_1 b_1' - \ldots - \varphi_{i-1} b_{i-1}' - \ldots \varphi_{i+1} b_{i+1}' - \ldots - \varphi_{k-(\rho-1)} b_{k-(\rho-1)}'\right)$$

και ο V γράφεται ως

$$V = \langle \{u_1, u_2, \ldots, u_\rho\} \cup \{b_1', b_2', \ldots, b_{k-(\rho-1)}'\} \rangle$$

Αν το $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ είναι βάση του V τότε και

το $B_\rho \cup U_\rho$ θα είναι βάση του V, καθώς κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $B_\rho \cup U_\rho$ όπως δείξαμε και το $B_\rho \cup U_\rho$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. (γιατί?)

Άμεση συνέπεια των ορισμών είναι και η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.7 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ και $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ μια βάση του V. Αν $U \subseteq B$ και $W = B \setminus U$ τότε

$$V = \langle U \rangle \oplus \langle W \rangle$$

<u>Απόδειξη</u> Αφήνεται ως άσκηση