

# Προηγούμενο Μάθημα: Υπενθύμιση και ανακεφαλαίωση

Σκοπός μας είναι να λύσουμε γραμμικά συστήματα. Γενική Στρατηγική:

- 1 Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.

# Προηγούμενο Μάθημα: Υπενθύμιση και ανακεφαλαίωση

Σκοπός μας είναι να λύσουμε γραμμικά συστήματα. Γενική Στρατηγική:

- 1 Δημιουργούμε τον *επαυξημένο* πίνακα του συστήματος.
- 2 Με γραμμοπράξεις φέρνουμε τον πίνακα σε μία *επιθυμητή* μορφή, η οποία είναι είτε **κλιμακωτή** είτε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**.

# Προηγούμενο Μάθημα: Υπενθύμιση και ανακεφαλαίωση

Σκοπός μας είναι να λύσουμε γραμμικά συστήματα. Γενική Στρατηγική:

- 1 Δημιουργούμε τον *επαυξημένο* πίνακα του συστήματος.
- 2 Με γραμμοπράξεις φέρνουμε τον πίνακα σε μία *επιθυμητή* μορφή, η οποία είναι είτε **κλιμακωτή** είτε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**.
- 3 Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα, σαρώνοντας τις μεταβλητές από τα δεξιά στα αριστερά.

- Γραμμικό Σύστημα  $\Leftrightarrow$  Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Γραμμικό Σύστημα  $\Leftrightarrow$  Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Οι γραμμοπράξεις μάς πηγαίνουν από έναν επαυξημένο πίνακα σε έναν άλλο *ισοδύναμο* επαυξημένο πίνακα.

- Γραμμικό Σύστημα  $\Leftrightarrow$  Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Οι γραμμοπράξεις μάς πηγαίνουν από έναν επαυξημένο πίνακα σε έναν άλλο **ισοδύναμο** επαυξημένο πίνακα. Και οι δύο πίνακες αντιστοιχούν σε γραμμικά συστήματα. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο είναι **εύκολα** επιλύσιμο.

- Γραμμικό Σύστημα  $\Leftrightarrow$  Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Οι γραμμοπράξεις μάς πηγαίνουν από έναν επαυξημένο πίνακα σε έναν άλλο **ισοδύναμο** επαυξημένο πίνακα. Και οι δύο πίνακες αντιστοιχούν σε γραμμικά συστήματα. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο είναι **εύκολα** επιλύσιμο.

Στην περίπτωση μας, **εύκολα επιλύσιμο** θα σημαίνει κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

## Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 5 \end{array} \right]$$

# Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{array} \right]$$

★ Μόνο τα στοιχεία πάνω από έναν οδηγό πρέπει να είναι 0 για να είμαστε στην ανηγμένη κλιμακωτή.

# Κλιμακωτή και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Κλιμακωτή αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή ;

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή ;

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Όχι, διότι δεν δημιουργείται σκάλα!

Είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή ;

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Όχι, διότι δεν δημιουργείται σκάλα!

Θα γίνει ανηγμένη κλιμακωτή βάζοντας την γραμμή με τα μηδενικά στο τέλος (ή πετώντας τη).

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

# Βασικό Θεώρημα Γραμμοϊσοδυναμίας.

## Θεώρημα

*Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν και μόνο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.*

## Θεώρημα

*Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν και μόνο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.*

Πως τον βρίσκουμε;

★ Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής αποκαλείται **οδηγός**.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 5/2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

# Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

Ο αλγόριθμος Gauss φέρνει έναν επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

# Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

Ο αλγόριθμος Gauss φέρνει έναν επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Το επιτυγχάνει αυτό δημιουργώντας σταδιακά μια σκάλα χρησιμοποιώντας μια γραμμή του πίνακα κάθε φορά για να **μηδενίσει** τους όρους κάτω από αυτή.

# Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

# Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \color{red}{1} & 2 & 5 \\ \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{3} & 4 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

⊙ *Βήμα 1:* Ανταλλάσσουμε γραμμές έτσι ώστε η γραμμή με τον αριστερότερο οδηγό να είναι πρώτη.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{3} & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 5 \end{array} \right]$$

- ⊙ *Βήμα 2:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα **στοιχεία** κάτω από τον **οδηγό** ίσα με 0.

- ⊙ *Βήμα 2:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα **στοιχεία** κάτω από τον **οδηγό** ίσα με 0.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Δηλαδή, αφαιρούμε τρεις φορές την πρώτη γραμμή από την από κάτω της:

- ⊙ *Βήμα 2:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα **στοιχεία** κάτω από τον **οδηγό** ίσα με 0.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Δηλαδή, αφαιρούμε τρεις φορές την πρώτη γραμμή από την από κάτω της:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

- ⊙ *Βήμα 3:* Αγνοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Αφότου αγνοήσουμε την πρώτη γραμμή, αφαιρούμε την δεύτερη από την τρίτη γραμμή.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Αφότου αγνοήσουμε την πρώτη γραμμή, αφαιρούμε την δεύτερη από την τρίτη γραμμή.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Αδύνατο σύστημα!

## Συνέχεια απαλοιφής Gauss.

Στο προηγούμενο παράδειγμα φέραμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή αλλά δεν χρειάστηκε να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

## Συνέχεια απαλοιφής Gauss.

Στο προηγούμενο παράδειγμα φέραμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή αλλά δεν χρειάστηκε να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή. Αυτό συνέβη διότι η τελευταία γραμμή αντιστοιχούσε σε αδύνατη εξίσωση, οπότε σταματήσαμε εκεί.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

## Συνέχεια απαλοιφής Gauss.

Στο προηγούμενο παράδειγμα φέραμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή αλλά δεν χρειάστηκε να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή. Αυτό συνέβη διότι η τελευταία γραμμή αντιστοιχούσε σε αδύνατη εξίσωση, οπότε σταματήσαμε εκεί.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Οπότε ας συνεχίσουμε με ένα άλλο παράδειγμα για να δούμε πως τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

## Άλλο Παράδειγμα.

Ο παρακάτω πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και μένει να τον φέρνουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

## Άλλο Παράδειγμα.

Ο παρακάτω πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και μένει να τον φέρνουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

⊙ *Βήμα 4:* Αρχίζοντας από το δεξιότερο στοιχείο-οδηγό, πηγαίνοντας αντίστροφα δημιουργούμε 0 πάνω από κάθε οδηγό.

## Άλλο Παράδειγμα.

Ο παρακάτω πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και μένει να τον φέρνουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

⊙ *Βήμα 4:* Αρχίζοντας από το δεξιότερο στοιχείο-οδηγό, πηγαίνοντας αντίστροφα δημιουργούμε 0 πάνω από κάθε οδηγό.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον οδηγό της τελευταία γραμμής για να μηδενίσουμε τα υπογραμμισμένα στοιχεία.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

## Κλιμακωτή σε Ανηγγμένη Κλιμακωτή.

Αφαιρούμε την τρίτη γραμμή 2 φορές από την δεύτερη και 6 φορές από την πρώτη για να κάνουμε τα υπογραμμισμένα στοιχεία ίσα με μηδέν.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & \underline{2} & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \underline{2} & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{array} \right]$$

## Κλιμακωτή σε Ανηγγμένη Κλιμακωτή.

Αφαιρούμε την τρίτη γραμμή 2 φορές από την δεύτερη και 6 φορές από την πρώτη για να κάνουμε τα υπογραμμισμένα στοιχεία ίσα με μηδέν.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & \underline{2} & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \underline{2} & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{array} \right]$$

Διαιρούμε τη δεύτερη γραμμή με 2 έτσι ώστε ο οδηγός να γίνει 1.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \underline{2} & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \underline{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{array} \right]$$

## Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το  $-9$  πάνω από τον **οδηγό 1** να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \mathbf{3} & \underline{-9} & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 & 54 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array} \right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

## Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το  $-9$  πάνω από τον **οδηγό 1** να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 54 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

- 1 Οι οδηγοί σχηματίζουν σκάλα. ✓

## Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το  $-9$  πάνω από τον **οδηγό 1** να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 54 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

- 1 Οι οδηγοί σχηματίζουν σκάλα. ✓
- 2 Κάθε οδηγός ισούται με 1. ✓

## Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το  $-9$  πάνω από τον **οδηγό 1** να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \mathbf{3} & \mathbf{-9} & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 & 54 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array} \right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

- 1 Οι οδηγοί σχηματίζουν σκάλα. ✓
- 2 Κάθε οδηγός ισούται με 1. ✓
- 3 Κάθε στοιχείο στήλη με οδηγό έχει 0 οπουδήποτε αλλού εκτός από τον οδηγό. ✓

# Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

- **Βήμα 1:** Εξασφαλίζουμε ότι ο αριστερότερος “οδηγός” βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών)

## Γραμμοπράξεις και επανάληψη

# Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

- **Βήμα 1:** Εξασφαλίζουμε ότι ο αριστερότερος “οδηγός” βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών)

## Γραμμοπράξεις και επανάληψη

- **Βήμα 2:** Με γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.

# Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

- **Βήμα 1:** Εξασφαλίζουμε ότι ο αριστερότερος “οδηγός” βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών)

## Γραμμοπράξεις και επανάληψη

- **Βήμα 2:** Με γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.
- **Βήμα 3:** Αφαιρούμε την τρέχουσα γραμμή-οδηγό (και όσες είναι επάνω της) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

# Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

- **Βήμα 1:** Εξασφαλίζουμε ότι ο αριστερότερος “οδηγός” βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών)

## Γραμμοπράξεις και επανάληψη

- **Βήμα 2:** Με γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.
- **Βήμα 3:** Αφαιρούμε την τρέχουσα γραμμή-οδηγό (και όσες είναι επάνω της) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

- **Βήμα 4:** Ξεκινώντας από τον πιο δεξιό οδηγό, χρησιμοποιούμε αντίστροφες γραμμοπράξεις για να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία πάνω από αυτόν. (προσθέτοντας το κατάλληλο πολλαπλάσιο της αντίστοιχης οδηγού-γραμμής)

## Στάδιο 1: Γενική $\Rightarrow$ Κλιμακωτή Μορφή

- **Αναδιάταξη γραμμών** ώστε ο οδηγός να “πέφτει” σε διαδοχικές στήλες.

## Στάδιο 1: Γενική $\Rightarrow$ Κλιμακωτή Μορφή

- **Αναδιάταξη γραμμών** ώστε ο οδηγός να “πέφτει” σε διαδοχικές στήλες.
- **Μηδενισμός στοιχείων κάτω** από τον οδηγό (προσθέτοντας κατάλληλα πολλαπλάσια της τρέχουσας γραμμής).

## Στάδιο 1: Γενική $\Rightarrow$ Κλιμακωτή Μορφή

- **Αναδιάταξη γραμμών** ώστε ο οδηγός να “πέφτει” σε διαδοχικές στήλες.
- **Μηδενισμός στοιχείων κάτω** από τον οδηγό (προσθέτοντας κατάλληλα πολλαπλάσια της τρέχουσας γραμμής).

- **Μηδενισμός στοιχείων πάνω** από κάθε οδηγό (προσθέτοντας το αντίστοιχο πολλαπλάσιο της οδηγού-γραμμής).

## Στάδιο 1: Γενική $\Rightarrow$ Κλιμακωτή Μορφή

- **Αναδιάταξη γραμμών** ώστε ο οδηγός να “πέφτει” σε διαδοχικές στήλες.
- **Μηδενισμός στοιχείων κάτω** από τον οδηγό (προσθέτοντας κατάλληλα πολλαπλάσια της τρέχουσας γραμμής).

- **Μηδενισμός στοιχείων πάνω** από κάθε οδηγό (προσθέτοντας το αντίστοιχο πολλαπλάσιο της οδηγού-γραμμής).
- Η τελική μορφή είναι *αναγμένη κλιμακωτή*.

# Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

# Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείες  $E_1, E_2$ .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right]$$

# Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείες  $E_1, E_2$ .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη παίρνω

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 13 \end{cases}$$

# Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείες  $E_1, E_2$ .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη παίρνω

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 13 \end{cases}$$

Αυτό που έγινε είναι ότι **στρίψαμε** την ευθεία  $E_2$  γύρω από το **κοινό της σημείο** με την  $E_1$ ,

# Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείες  $E_1, E_2$ .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη παίρνω

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 13 \end{cases}$$

Αυτό που έγινε είναι ότι **στρίψαμε** την ευθεία  $E_2$  γύρω από το **κοινό της σημείο** με την  $E_1$ , έως ότου το  $E_1$  να γίνει μια ευθεία η οποία είναι **παράλληλη** στον άξονα των  $x$ , και συγκεκριμένα η  $2y = 13$ .

# Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείες  $E_1, E_2$ .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη παίρνω

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 13 \end{cases}$$

Αυτό που έγινε είναι ότι **στρίψαμε** την ευθεία  $E_2$  γύρω από το **κοινό της σημείο** με την  $E_1$ , έως ότου το  $E_1$  να γίνει μια ευθεία η οποία είναι **παράλληλη** στον άξονα των  $x$ , και συγκεκριμένα η  $2y = 13$ .

★ Με **στροφή** της  $E_2$  γύρω από το **σημείο τομής της** με την  $E_1$  παίρνω δύο άλλες ευθείες, που προφανώς έχουν το **ίδιο σημείο τομής με πριν!**

## Στροφές σε συγκεκριμένο παράδειγμα.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array} \right]$$

## Στροφές σε συγκεκριμένο παράδειγμα.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array} \right]$$

Ο αλγόριθμος Gauss **στρίβει** τις αρχικές ευθείες  $x + y = 1, 2x + 4y = 15$  γύρω από το **σημείο τομής τους**,

## Στροφές σε συγκεκριμένο παράδειγμα.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array} \right]$$

Ο αλγόριθμος Gauss **στρίβει** τις αρχικές ευθείες  $x + y = 1, 2x + 4y = 15$  γύρω από το **σημείο τομής τους**, έτσι ώστε

## Στροφές σε συγκεκριμένο παράδειγμα.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array} \right]$$

Ο αλγόριθμος Gauss **στρίβει** τις αρχικές ευθείες  $x + y = 1, 2x + 4y = 15$  γύρω από το **σημείο τομής τους**, έτσι ώστε να γίνουν οι ευθείες  $x = -5.5, y = 6.5$  οι οποίες

## Στροφές σε συγκεκριμένο παράδειγμα.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array} \right]$$

Ο αλγόριθμος Gauss **στρίβει** τις αρχικές ευθείες  $x + y = 1, 2x + 4y = 15$  γύρω από το **σημείο τομής τους**,

έτσι ώστε να γίνουν οι ευθείες  $x = -5.5, y = 6.5$  οι οποίες

- είναι **κάθετες** μεταξύ τους και
- παράλληλες στους άξονες των  $\psi$  και  $x$  αντίστοιχα.

## Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ),

## Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ), στρίβω το  $\Pi_1$  ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ .

## Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ), στρίβω το  $\Pi_1$  ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα,  $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$ .

## Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ), στρίβω το  $\Pi_1$  ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα,  $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$ .

★ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} y + 6z = 13 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

# Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ), στρίβω το  $\Pi_1$  ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα,  $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$ .

★ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} y + 6z = 13 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

το οποίο αντιστοιχεί στην στροφή του  $\Pi_1$  γύρω από την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ ,

## Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ), στρίβω το  $\Pi_1$  ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα,  $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$ .

★ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} y + 6z = 13 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

το οποίο αντιστοιχεί στην στροφή του  $\Pi_1$  γύρω από την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ , τόσο ώστε το  $\Pi_1$  να γίνει παράλληλο στον άξονα των  $x$ .

## Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο  $\Pi_1$ ) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου  $\Pi_2$ ), στρίβω το  $\Pi_1$  ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα,  $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$ .

★ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} y + 6z = 13 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

το οποίο αντιστοιχεί στην στροφή του  $\Pi_1$  γύρω από την ευθεία που αποτελεί την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ , τόσο ώστε το  $\Pi_1$  να γίνει παράλληλο στον άξονα των  $x$ .

★ Ευθεία τομής των  $\Pi_1, \Pi_2 =$  Λύση του Συστήματος.

# Γεωμετρική Ερμηνείας Συνέχεια.

- ★ Ευθεία τομής των  $\Pi_1, \Pi_2 =$  Λύση του Συστήματος.  
Θέλω να βρω αυτή την **ευθεία** (την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ ).

# Γεωμετρική Ερμηνείας Συνέχεια.

★ Ευθεία τομής των  $\Pi_1, \Pi_2 =$  Λύση του Συστήματος.  
Θέλω να βρω αυτή την **ευθεία** (την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ ).

→ Η εν λόγω **στροφή** αλλάζει ποια είναι τα ε-  
πίπεδα, αλλά όχι ποια είναι η ευθεία (δηλαδή οι λύσεις του συστήματος)!

# Γεωμετρική Ερμηνείας Συνέχεια.

\* Ευθεία τομής των  $\Pi_1, \Pi_2 =$  Λύση του Συστήματος.  
Θέλω να βρω αυτή την **ευθεία** (την τομή των  $\Pi_1, \Pi_2$ ).

→ Η εν λόγω **στροφή** αλλάζει ποια είναι τα επίπεδα, αλλά όχι ποια είναι η ευθεία (δηλαδή οι λύσεις του συστήματος)!

Ο αλγόριθμος Gauss στην προκειμένη περίπτωση ουσιαστικά εκφράζει την ευθεία ως τομή δύο άλλων επιπέδων  $\Pi'_1, \Pi'_2$  τα οποία είναι **κάθετα** μεταξύ τους.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων  $x = 4, y = 5, z = 1$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων  $x = 4, y = 5, z = 1$ , τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους!

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων  $x = 4, y = 5, z = 1$ , τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους! Άρα μέσω **στροφών** ο αλγόριθμος Gauss προσπαθεί να αντικαταστήσει τα αρχικά επίπεδα με άλλα επίπεδα τα οποία:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων  $x = 4, y = 5, z = 1$ , τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους! Άρα μέσω **στροφών** ο αλγόριθμος Gauss προσπαθεί να αντικαταστήσει τα αρχικά επίπεδα με άλλα επίπεδα τα οποία:

- 1 Τέμνονται στα ίδια σημεία με τα αρχικά.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων  $x = 4, y = 5, z = 1$ , τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους! Άρα μέσω **στροφών** ο αλγόριθμος Gauss προσπαθεί να αντικαταστήσει τα αρχικά επίπεδα με άλλα επίπεδα τα οποία:

- 1 Τέμνονται στα ίδια σημεία με τα αρχικά.
- 2 Είναι κάθετα μεταξύ τους και παράλληλα στους άξονες (όταν το σύστημα έχει **ακριβώς μία λύση**).

Ένας αλγόριθμος ο οποίος παίρνει σαν είσοδο έναν πίνακα και βρίσκει την **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** του.

Άμεση περιγραφή των λύσεων ενός συστήματος!

Ένας αλγόριθμος ο οποίος παίρνει σαν είσοδο έναν πίνακα και βρίσκει την **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** του.

Άμεση περιγραφή των λύσεων ενός συστήματος!

**Γεωμετρική ματιά.**

Ξεκινάμε από μία συλλογή υπερεπιπέδων και φτάνουμε σε μια άλλη σύλλογη **κάθετων μεταξύ τους** υπερεπιπέδων η οποία τέμνεται στα ακριβώς τα ίδια σημεία με την αρχική.

# Υπενθύμιση και κάποια ανακεφαλαίωση.

- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

# Υπενθύμιση και κάποια ανακεφαλαίωση.

- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.
- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν την ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

# Υπενθύμιση και κάποια ανακεφαλαίωση.

- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.
- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν την ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.
- Μπορούμε να μεταβούμε από ένα σύστημα (επαυξημένο πίνακα) στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μέσω γραμμοπράξεων.

# Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις: Υπενθύμιση

- **Αντικατάσταση** μιας γραμμής με το άθροισμα του εαυτού της και το πολλαπλάσιο μιας άλλης.
- **Ανταλλαγή** δύο γραμμών μεταξύ τους.
- **Πολλαπλασιασμός** μιας γραμμής με μη μηδενική σταθερά.

*Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες:* Ο ένας μετασχηματίζεται στον άλλο μέσω γραμμοπράξεων.

# Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

# Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή.

# Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή.

**Βασικές** μεταβλητή: Μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγό.

**Ελεύθερες μεταβλητές** : Μη-μηδενικές στήλες χωρίς οδηγό.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Ένα ακόμη παράδειγμα.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Η πρώτη, δεύτερη και πέμπτη στήλη έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι **βασικές**.

Η τρίτη και τέταρτη στήλη δεν έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι **ελεύθερες**.

Βασικές:  $x_1, x_2, x_5$ , ελεύθερες:  $x_3, x_4$ .

# Ο πρώτος μας στόχος.

Όπως έχουμε πει, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση
- Ακριβώς μία λύση (συμβατό)
- Άπειρες λύσεις (υπερ-καθορισμένο)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να βρούμε σε ποια περίπτωση ανήκουμε;

# Επίλυση μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Όλες οι μεταβλητές είναι **βασικές**!

$$x_1 = 3, x_2 = -7, x_3 = 4$$

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!