

Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Τρίτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τα οποία τα αποκαλούμε διανύσματα, για τα οποία ισχύουν οι βασικές ιδιότητες της επιμεριστικότητας, αντιμεταθετικότητας, προσεταιριστικότητας με τα στοιχεία του K και επιπλέον

Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τα οποία τα αποκαλούμε διανύσματα, για τα οποία ισχύουν οι βασικές ιδιότητες της επιμεριστικότητας, αντιμεταθετικότητας, προσεταιριστικότητας με τα στοιχεία του K και επιπλέον

- ❶ $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$
- ❷ $u \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in V$
- ❸ $0 \in V$, όπου 0 τέτοιο ώστε $0 + u = u$
- ❹ $v \in V \Rightarrow \exists u \in V : u + v = 0$ και u συμβολίζεται με $-v$.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.
- Το σύνολο των $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^T = A$ **είναι** υποχώρος του συνόλου όλων των $n \times n$ πινάκων.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι υποσύνολο κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.
- Το σύνολο των $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^T = A$ **είναι** υποχώρος του συνόλου όλων των $n \times n$ πινάκων.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με πραγματικούς αριθμούς.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με πραγματικούς αριθμούς. Τότε το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$,

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με πραγματικούς αριθμούς. Τότε το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$, αλλά το $Ax = b, b \neq 0$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με πραγματικούς αριθμούς. Τότε το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$, αλλά το $Ax = b, b \neq 0$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Ισοδυναμίες.

* W γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$

$\iff$

* $\exists$ πίνακας A με n στήλες ώστε $W = \{x : Ax = 0\}$

$\iff$

* W είναι γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

👉 Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

☝ Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

★ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος,

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

☞ Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

★ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος, ένα επίπεδο ως γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων κλπ.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

☞ Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

★ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος, ένα επίπεδο ως γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων κλπ. Αντίστοιχα, όπως θα δούμε, κάθε υποχώρος κάθε διανυσματικού χώρου είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

☞ Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

★ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος, ένα επίπεδο ως γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων κλπ. Αντίστοιχα, όπως θα δούμε, κάθε υποχώρος κάθε διανυσματικού χώρου είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων και ως το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ για κάποιον κατάλληλο πίνακα A .

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

★ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

★ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \dots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \dots c_n a_n.$$

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

★ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \dots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \dots c_n a_n.$$

Αν $K = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με πρόσθεση το αποκλειστικό ή ($\oplus$) έχουμε

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

★ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \dots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \dots c_n a_n.$$

Αν $K = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με πρόσθεση το αποκλειστικό ή ($\oplus$) έχουμε

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

★ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \dots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \dots c_n a_n.$$

Αν $K = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με πρόσθεση το αποκλειστικό ή ($\oplus$) έχουμε

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \right.$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \dots + c'_n a_n$ άρα

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \dots + c'_n a_n$ άρα
 $u + v = (c_1 + c'_1) a_1 + \dots + (c_n + c'_n) a_n \in W$.

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \dots + c'_n a_n$ άρα

$u + v = (c_1 + c'_1) a_1 + \dots + (c_n + c'_n) a_n \in W$.

Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1) a_1 + \dots + (\lambda c_n) a_n \in W$,

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \dots + c'_n a_n$ άρα

$u + v = (c_1 + c'_1) a_1 + \dots + (c_n + c'_n) a_n \in W$.

Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1) a_1 + \dots + (\lambda c_n) a_n \in W$, και

$0 = 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_n \in W$.

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \dots + c'_n a_n$ άρα

$u + v = (c_1 + c'_1) a_1 + \dots + (c_n + c'_n) a_n \in W$.

Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1) a_1 + \dots + (\lambda c_n) a_n \in W$, και

$0 = 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_n \in W$. Επίσης, $0 \in W$

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V .

★ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \dots + c'_n a_n$ άρα
 $u + v = (c_1 + c'_1) a_1 + \dots + (c_n + c'_n) a_n \in W$.

Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1) a_1 + \dots + (\lambda c_n) a_n \in W$, και

$0 = 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_n \in W$. Επίσης, $0 \in W$ και

$-u = -(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) = (-c_1) a_1 + \dots + (-c_n) a_n \in W$.

Ορισμός γραμμικής ανεξαρτησίας.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K . Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο δεν υπάρχουν $j \in \{1, \dots, n\}$ και $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ όχι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$a_j = c_1 a_1 + \dots + c_{j-1} a_{j-1} + c_j a_j + \dots + c_n a_n.$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3. Τι περιέχει ο γραμμικός υποχώρος

$$W := \text{span}\{2t^3 + 1, 1 + t + t^2, -t - t^2 + 2t^3\}$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης.

- ★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολωνύμων βαθμού το πολύ 3. Τι περιέχει ο γραμμικός υποχώρος

$$W := \text{span}\{2t^3 + 1, 1 + t + t^2, -t - t^2 + 2t^3\}$$

- ★ Έστω W ο εξής γραμμικός υποχώρος του χώρου των περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο 2π :

$$\text{span}\{\sin(2x), \eta\mu^2(x), \sigma\upsilon\nu^2(x)\}.$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης.

- ★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολωνύμων βαθμού το πολύ 3. Τι περιέχει ο γραμμικός υποχώρος

$$W := \text{span}\{2t^3 + 1, 1 + t + t^2, -t - t^2 + 2t^3\}$$

- ★ Έστω W ο εξής γραμμικός υποχώρος του χώρου των περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο 2π :

$$\text{span}\{\sin(2x), \eta\mu^2(x), \sigma\upsilon\nu^2(x)\}.$$

Από την ιδιότητα $\sin(2x) = \eta\mu^2(x) - \sigma\upsilon\nu^2(x)$, έχουμε ότι

$$\text{span}\{\sin(2x), \eta\mu^2(x), \sigma\upsilon\nu^2(x)\} = \text{span}\{\eta\mu^2(x), \sigma\upsilon\nu^2(x)\}.$$

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$.

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n .

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n .
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:

Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 σύστημα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμική θήκη 4 διανυσμάτων:

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n .
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:

Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 σύστημα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ;

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n .
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:

Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 σύστημα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ; Απάντηση: 2^4 .

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n .
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:

Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 σύστημα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ; Απάντηση: 2^4 .

Αν το σύστημα ήταν 10×12 αλλά $K = \mathbb{R}$, πόσες λύσεις θα είχα;

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n .
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n .
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:

Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 σύστημα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ; Απάντηση: 2^4 .

Αν το σύστημα ήταν 10×12 αλλά $K = \mathbb{R}$, πόσες λύσεις θα είχα;
Άπειρες!

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) =$$

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T =$$

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = \underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}.$$

Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T =$$
$$\underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}.$$
 Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

★ Η απεικόνιση $T(A) = \det(A)$ είναι γραμμική;

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = \underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}.$$

Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική

απεικόνιση.

★ Η απεικόνιση $T(A) = \det(A)$ είναι γραμμική; Όχι, διότι **δεν** ικανοποιεί ούτε την $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = \underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}.$$

Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

★ Η απεικόνιση $T(A) = \det(A)$ είναι γραμμική; Όχι, διότι **δεν** ικανοποιεί ούτε την $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ούτε την $\det(\lambda A) = \lambda \cdot \det(A)$.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K . Μία απεικόνιση $T : V \rightarrow U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

★ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \rightarrow V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

$$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = \underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}.$$

Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική

απεικόνιση.

★ Η απεικόνιση $T(A) = \det(A)$ είναι γραμμική; Όχι, διότι **δεν** ικανοποιεί ούτε την $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ούτε την $\det(\lambda A) = \lambda \cdot \det(A)$. (για την ακρίβεια μόνο για πίνακες 1×1 είναι γραμμική).

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

- 1 Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή

$$\ker(T) := \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

- 1 Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή

$$\ker(T) := \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

- 2 Το εύρος (σύνολο τιμών) της T ως το σύνολο των $v \in V$ για τα οποία υπάρχει κάποιο $u \in U$ με $T(u) = v$. Δηλαδή

$$\text{Range}(T) := \{v \in V \mid \exists u \in U : T(u) = v\}.$$

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

- 1 Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή

$$\ker(T) := \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

- 2 Το εύρος (σύνολο τιμών) της T ως το σύνολο των $v \in V$ για τα οποία υπάρχει κάποιο $u \in U$ με $T(u) = v$. Δηλαδή

$$\text{Range}(T) := \{v \in V \mid \exists u \in U : T(u) = v\}.$$

★ $\ker(T)$ είναι γραμμικός υποχώρος του U

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

- 1 Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή

$$\ker(T) := \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

- 2 Το εύρος (σύνολο τιμών) της T ως το σύνολο των $v \in V$ για τα οποία υπάρχει κάποιο $u \in U$ με $T(u) = v$. Δηλαδή

$$\text{Range}(T) := \{v \in V \mid \exists u \in U : T(u) = v\}.$$

★ $\ker(T)$ είναι γραμμικός υποχώρος του U και $\text{Range}(T)$ γραμμικός υποχώρος του V .

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$.

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση;

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς

$$T(f + g) = (f + g) + (f + g)' = \underbrace{(f + f')}_{T(f)} + \underbrace{(g + g')}_{T(g)} \text{ και}$$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς

$$T(f + g) = (f + g) + (f + g)' = \underbrace{(f + f')}_{T(f)} + \underbrace{(g + g')}_{T(g)} \text{ και}$$

$$T(af) = af + (af)' = a(f + f') = aT(f).$$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς

$$T(f + g) = (f + g) + (f + g)' = \underbrace{(f + f')}_{T(f)} + \underbrace{(g + g')}_{T(g)} \text{ και}$$

$$T(af) = af + (af)' = a(f + f') = aT(f).$$

Έχουμε ότι $f \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0 \Leftrightarrow f + f' = 0$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $T(A) = A + A^T$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της T ;

Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς

$$T(f + g) = (f + g) + (f + g)' = \underbrace{(f + f')}_{T(f)} + \underbrace{(g + g')}_{T(g)} \text{ και}$$

$$T(af) = af + (af)' = a(f + f') = aT(f).$$

Έχουμε ότι $f \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0 \Leftrightarrow f + f' = 0 \Leftrightarrow f = Ce^{-x}$ για κάποια σταθερά C .

Πίσω στο K^n : ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$.

Πίσω στο K^n : ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\text{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

Πίσω στο K^n : ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\text{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n .

Πίσω στο K^n : ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\text{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n .
- Όπως έχουμε ξαναπει, αν ο βαθμός του A είναι r τότε ο μηδενοχώρος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων.

Πίσω στο K^n : ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\text{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n .
- Όπως έχουμε ξαναπει, αν ο βαθμός του A είναι r τότε ο μηδενοχώρος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων.

Παράδειγμα: Είναι το $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0\}$ γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^4$;

Πίσω στο K^n : ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\text{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n .
- Όπως έχουμε ξαναπει, αν ο βαθμός του A είναι r τότε ο μηδενοχώρος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων.

Παράδειγμα: Είναι το $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0\}$ γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^4$; Διότι $W = \text{Null}([2 \ 3 \ 0 \ -2])$. ✓

Πίσω στο K^n : ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$.

Πίσω στο K^n : ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\text{Col}(A) := \text{Range}(T_A) = \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

Πίσω στο K^n : ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\text{Col}(A) := \text{Range}(T_A) = \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

- Ο χώρος στηλών είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^m .

Πίσω στο K^n : ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\text{Col}(A) := \text{Range}(T_A) = \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

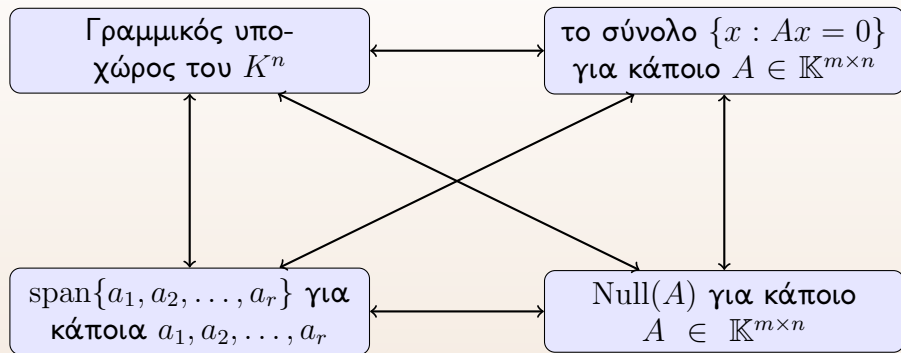
- Ο χώρος στηλών είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^m .
- Όπως έχουμε ξαναπεί, ο χώρος στηλών είναι η γραμμική θήκη των στηλών του A .

Πίσω στο K^n : ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \rightarrow K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\text{Col}(A) := \text{Range}(T_A) = \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

- Ο χώρος στηλών είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^m .
- Όπως έχουμε ξαναπεί, ο χώρος στηλών είναι η γραμμική θήκη των στηλών του A .



👉 Εδώ το r ισούται με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών του A .

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τι είναι ο γραμμικός υποχώρος.
- Τι είναι ο πυρήνας και το εύρος μιας γραμμικής απεικόνισης.
- Τι είναι ο μηδενοχώρος και ο χώρος στηλών.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!