

Ορίζουσες (Determinants)

Γραμμική Άλγεβρα — Εισαγωγή

Γραμμική Άλγεβρα

- 1 Ορισμός
- 2 Ορίζουσα 2×2
- 3 Ορίζουσα 3×3
- 4 Ανάπτυγμα Laplace
- 5 Ιδιότητες
- 6 Γεωμετρική Ερμηνεία
- 7 Εφαρμογές
- 8 Ανακεφαλαίωση

Τι είναι η Ορίζουσα;

Ορισμός

Η **ορίζουσα** (determinant) είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε **τετραγωνικό πίνακα** A έναν **μοναδικό αριθμό**:

$$\det(A) \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad |A| \in \mathbb{R}$$

Συμβολισμός:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Προσοχή!

Ορίζεται **μόνο** για τετραγωνικούς πίνακες ($n \times n$).

Γιατί μας ενδιαφέρει;

- Ελέγχει αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος
- Μετράει «πόσο» μεταβάλλεται ο χώρος
- Χρησιμοποιείται στη λύση γραμμικών συστημάτων

Ορίζουσα 2×2 Πίνακα

Τύπος

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$-bc \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) + ad$$

Παράδειγμα:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = \mathbf{10}$$

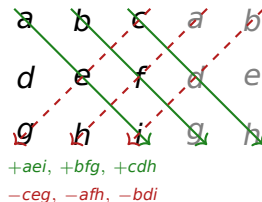
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = \mathbf{0}$$

(Οι γραμμές είναι ανάλογες $\rightarrow$ ο πίνακας **δεν** είναι αντιστρέψιμος)

Κανόνας Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh \\ -ceg - afh - bdi$$



Ανάπτυγμα Laplace (Για $n \times n$)

Ορισμός

Ανάπτυγμα ως προς την i -οστή **γραμμή**:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot C_{ij} \quad \text{όπου} \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij} : ορίζουσα του πίνακα μετά αφαίρεση γραμμής i και στήλης j

Πρότυπο προσήμων:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Συμβουλή

Επιλένουμε γραμμή/στήλη με τα **περισσότερα μηδενικά** για λιγότερους

Αλγεβρικές

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(kA) = k^n \det(A)$

Γραμμικές Πράξεις

- Εναλλαγή 2 γραμμών:
 $\det \rightarrow -\det$
- Πολλαπλασιασμός γραμμής με k :
 $\det \rightarrow k \cdot \det$
- Πρόσθεση πολλαπλάσιου γραμμής σε άλλη: $\det$ αμετάβλητη
- Δύο ίδιες γραμμές: $\det = 0$

Κεντρικό Θεώρημα

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ αντιστρέψιμος} \iff \text{rank}(A) = n$$

Σε $\mathbb{R}^2$

$|\det(A)| = \text{εμβαδόν}$
παραλληλογράμμου που ορίζουν οι
στήλες.



Σε $\mathbb{R}^3$

$|\det(A)| = \text{όγκος}$ παραλληλεπιπέδου
που ορίζουν οι στήλες.

Πρόσημο

- $\det > 0$: διατήρηση προσανατολισμού
- $\det < 0$: αντιστροφή προσανατολισμού
- $\det = 0$: «κατάρρευση» διάστασης

Κανόνας Cramer

Λύση $Ax = b$:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

όπου A_i : A με i -η στήλη
 $= b$

Αντίστροφος Πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

(adj:
ανάδρομος/συνεκτικός
πίνακας)

Ιδιοτιμές

Οι ιδιοτιμές λ λύνουν:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(χαρακτηριστική
εξίσωση)

Σύνδεση με Rank

$$\det(A) = 0 \iff \text{rank}(A) < n \iff \text{οι στήλες είναι γραμμικά εξαρτημένες}$$

Έννοια	Περιεχόμενο
Ορισμός	Αριθμός που αντιστοιχεί σε τετραγωνικό πίνακα
2×2	$\det = ad - bc$
3×3	Κανόνας Sarrus
$n \times n$	Ανάπτυγμα Laplace
Γεωμετρία	Εμβαδόν / Όγκος / Προσανατολισμός
Αντιστρεψιμότητα	$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος
Εφαρμογές	Cramer, A^{-1} , ιδιοτιμές

Ερωτήσεις;

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!