

Γραμμική Άλγεβρα στην Οικονομία και την Οικονομετρία

Διανυσματικός χώρος, υπόχωρος, γραμμική εξάρτηση, ανεξαρτησία, βάση

Στόχος είναι να δούμε πώς οι έννοιες:

- διανυσματικός χώρος,
- υπόχωρος,
- γραμμική εξάρτηση,
- γραμμική ανεξαρτησία,
- βάση διανυσματικού χώρου

εμφανίζονται σε παραδείγματα από:

- **Οικονομετρία**
- **Μακροοικονομία**
- **Μικροοικονομία**

1. Διανυσματικός χώρος: η βασική ιδέα

Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο διανυσμάτων όπου μπορούμε:

- να προσθέτουμε διανύσματα
- να τα πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς

Οικονομική ερμηνεία: ένα διάνυσμα μπορεί να περιγράφει μια οικονομική κατάσταση.

Παράδειγμα:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \text{κατανάλωση} \\ \text{εισόδημα} \\ \text{φόρος} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 2000 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Το παραπάνω διάνυσμα περιγράφει ένα νοικοκυριό με:

- κατανάλωση 1200,
- εισόδημα 2000,
- φόρο 300.

Παράδειγμα στην οικονομετρία

Έστω ότι παρατηρούμε για n νοικοκυριά τη μηνιαία κατανάλωση:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

όπου C_i είναι η κατανάλωση του νοικοκυριού i .

Άρα το $\mathbb{R}^n$ είναι ο χώρος όλων των πιθανών δειγμάτων κατανάλωσης.

Υπόχωρος στην οικονομετρία

Έστω το γραμμικό υπόδειγμα:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \beta_2 T_i + u_i$$

όπου:

- C_i : κατανάλωση
- Y_i : εισόδημα
- T_i : φόρος

Σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

Οι στήλες του $\mathbf{X}$ είναι:

$$\mathbf{1}, \quad \mathbf{Y}, \quad \mathbf{T}$$

Όλες οι προβλεπόμενες τιμές

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

ανήκουν στον υπόχωρο που δημιουργούν οι $\mathbf{1}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}$.

Γραμμική εξάρτηση στην οικονομετρία

Έστω ότι σε μια παλινδρόμηση βάζουμε:

- εισόδημα Y_i
- φόρο T_i
- διαθέσιμο εισόδημα D_i

όπου:

$$D_i = Y_i - T_i$$

Τότε υπάρχει γραμμική εξάρτηση, γιατί:

$$D_i - Y_i + T_i = 0$$

Άρα μία μεταβλητή γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Γραμμική ανεξαρτησία στην οικονομετρία

Στο μοντέλο

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \beta_2 r_i + u_i$$

αν οι στήλες $1, \mathbf{Y}, \mathbf{r}$ δεν γράφονται η μία ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Αυτό είναι σημαντικό γιατί τότε οι συντελεστές του μοντέλου προσδιορίζονται μοναδικά.

Βάση στην οικονομετρία

Στο υπόδειγμα

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \beta_2 T_i + u_i$$

οι στήλες

$$\mathbf{1}, \quad \mathbf{Y}, \quad \mathbf{T}$$

αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αποτελούν βάση του χώρου των προβλεπόμενων τιμών.

Κάθε προβλεπόμενο διάνυσμα γράφεται ως:

$$\hat{\mathbf{C}} = \beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 \mathbf{Y} + \beta_2 \mathbf{T}$$

Μικροοικονομία: στρατηγικές ως στοιχεία συνόλων

Στη θεωρία παιγνίων, κάθε παίκτης i διαθέτει ένα **σύνολο στρατηγικών**:

$$S_i$$

Παράδειγμα: δύο επιχειρήσεις επιλέγουν τιμή για το προϊόν τους.

$$S_1 = \{10, 11, 12\}, \quad S_2 = \{10, 11, 12\}$$

όπου κάθε αριθμός είναι μία πιθανή τιμή πώλησης.

Κάθε επιλογή του παίκτη είναι ένα στοιχείο του αντίστοιχου συνόλου στρατηγικών:

$$s_1 \in S_1, \quad s_2 \in S_2$$

Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων στρατηγικών

Το σύνολο όλων των δυνατών προφίλ στρατηγικών είναι το καρτεσιανό γινόμενο:

$$S = S_1 \times S_2$$

Άρα κάθε προφίλ στρατηγικών είναι της μορφής:

$$s = (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$$

Παράδειγμα:

$$(10, 12) \in S_1 \times S_2$$

σημαίνει:

- η επιχείρηση 1 επιλέγει τιμή 10
- η επιχείρηση 2 επιλέγει τιμή 12

Συναρτήσεις αποδόσεων πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο

Η απόδοση κάθε παίκτη είναι συνάρτηση του συνολικού προφίλ στρατηγικών:

$$u_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Παράδειγμα:

$$u_1(s_1, s_2) = \text{κέρδος της επιχείρησης 1}, \quad u_2(s_1, s_2) = \text{κέρδος της επιχείρησης 2}$$

Η απόδοση κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από τη δική του στρατηγική, αλλά από το συνολικό προφίλ στρατηγικών.

Παράδειγμα: ανταγωνισμός δύο επιχειρήσεων

Δύο επιχειρήσεις επιλέγουν ποσότητες:

$$q_1 \in S_1, \quad q_2 \in S_2$$

και η συνολική ποσότητα είναι:

$$Q = q_1 + q_2$$

Αν η τιμή της αγοράς είναι:

$$P(Q) = a - bQ$$

τότε το κέρδος της επιχείρησης 1 γράφεται:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - b(q_1 + q_2)) - cq_1$$

και αντίστοιχα:

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - b(q_1 + q_2)) - cq_2$$

Στρατηγικές ως συναρτήσεις

Σε ορισμένα παιχνίδια, μια στρατηγική δεν είναι απλώς ένας αριθμός, αλλά μια **συνάρτηση**.

Παράδειγμα: μια επιχείρηση παρατηρεί το κόστος c και επιλέγει τιμή p . Τότε μια στρατηγική μπορεί να είναι:

$$\sigma_i : C_i \rightarrow P_i$$

όπου:

- C_i : σύνολο πιθανών καταστάσεων / πληροφοριών
- P_i : σύνολο πιθανών τιμών

Άρα η στρατηγική είναι κανόνας απόφασης.

Σύνδεση μικροοικονομίας με διανυσματικούς χώρους

Αν οι στρατηγικές είναι ποσότητες ή διανύσματα αγαθών, τότε μπορούν να ανήκουν σε διανυσματικούς χώρους.

Παράδειγμα:

$$q_i \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^k$$

Τότε το συνολικό προφίλ στρατηγικών ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο:

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$$

που συχνά ταυτίζεται με χώρο όπως:

$$\mathbb{R}^{2k}$$

Μακροοικονομία: η κατάσταση της οικονομίας ως διάνυσμα

Σε μια χρονική στιγμή t , η οικονομία μπορεί να περιγραφεί από ένα διάνυσμα κατάστασης:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} Y_t \\ \pi_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

όπου:

- Y_t : παραγωγή ή ΑΕΠ
- π_t : πληθωρισμός
- u_t : ανεργία

Άρα:

$$\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$$

Σύνολα πολιτικής στη μακροοικονομία

Η κυβέρνηση και η κεντρική τράπεζα διαθέτουν σύνολα δυνατών επιλογών.

Παράδειγμα:

$$G = \{\text{χαμηλές δαπάνες, μεσαίες δαπάνες, υψηλές δαπάνες}\}$$

$$R = \{\text{χαμηλό επιτόκιο, μεσαίο επιτόκιο, υψηλό επιτόκιο}\}$$

όπου:

- G : σύνολο δημοσιονομικών επιλογών
- R : σύνολο νομισματικών επιλογών

Καρτεσιανό γινόμενο επιλογών πολιτικής

Το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών πολιτικής είναι:

$$G \times R$$

Κάθε στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου έχει τη μορφή:

$$(g, r) \in G \times R$$

Παράδειγμα:

$$(\text{υψηλές δαπάνες, χαμηλό επιτόκιο}) \in G \times R$$

Το καρτεσιανό γινόμενο περιέχει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς δημοσιονομικής και νομισματικής πολιτικής.

Κανόνας πολιτικής ως συνάρτηση

Ένας κανόνας πολιτικής μπορεί να ορίζεται ως συνάρτηση από το σύνολο καταστάσεων στο σύνολο επιλογών.

Παράδειγμα για την κεντρική τράπεζα:

$$\rho : X \rightarrow R$$

όπου:

- X : σύνολο δυνατών καταστάσεων της οικονομίας
- R : σύνολο πιθανών επιτοκίων

Η συνάρτηση ρ λέει:

σε κάθε κατάσταση $\mathbf{x}_t$, ποιο επιτόκιο επιλέγεται.

Παράδειγμα μακροοικονομικού κανόνα

Έστω ότι η κεντρική τράπεζα επιλέγει επιτόκιο ανάλογα με τον πληθωρισμό και την παραγωγή:

$$i_t = \alpha + \beta\pi_t + \delta Y_t$$

Τότε μπορούμε να δούμε τον κανόνα ως συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$f(\pi_t, Y_t) = \alpha + \beta\pi_t + \delta Y_t$$

Είσοδος: η κατάσταση της οικονομίας (π_t, Y_t)

Έξοδος: το επιτόκιο i_t

Δυναμικό σύστημα στη μακροοικονομία

Συχνά η μακροοικονομία περιγράφει πώς η οικονομία περνά από μια κατάσταση στην επόμενη:

$$\mathbf{x}_{t+1} = F(\mathbf{x}_t, \mathbf{a}_t)$$

όπου:

- $\mathbf{x}_t$: τρέχουσα κατάσταση της οικονομίας
- $\mathbf{a}_t$: επιλογή πολιτικής

Αν

$$\mathbf{x}_t \in X, \quad \mathbf{a}_t \in A$$

τότε

$$F : X \times A \rightarrow X$$

Παράδειγμα: κυβέρνηση και κεντρική τράπεζα

Έστω ότι η κατάσταση της οικονομίας είναι:

$$\mathbf{x}_t = (Y_t, \pi_t, u_t)$$

Η κυβέρνηση επιλέγει δημόσιες δαπάνες:

$$g_t \in G$$

Η κεντρική τράπεζα επιλέγει επιτόκιο:

$$i_t \in R$$

Άρα το συνολικό policy profile είναι:

$$(g_t, i_t) \in G \times R$$

και η εξέλιξη της οικονομίας περιγράφεται από:

$$\mathbf{x}_{t+1} = F(\mathbf{x}_t, g_t, i_t)$$

Έννοια	Οικονομετρία	Μακρο	Μικρο
Διανυσματικός χώρος	δείγματα μεταβλητών	state vectors	καλάθια / α
Υπόχωρος	fitted values	factor space	σταθερή δα
Γρ. εξάρτηση	πολυγραμμικότητα	ταυτότητες	budget sha
Γρ. ανεξαρτησία	regressors	distinct shocks	μη πλεονάζ
Βάση	ελάχιστο σύνολο regressors	βασικοί παράγοντες	βασικά δια

Take-home message

Η ίδια μαθηματική γλώσσα εμφανίζεται παντού:

- στην **οικονομετρία**: πίνακες δεδομένων, προβολές, regressors
- στη **μικροοικονομία**: στρατηγικές, σύνολα, αποδόσεις, καρτεσιανά γινόμενα
- στη **μακροοικονομία**: state vectors, policy rules, δυναμικά συστήματα

Άρα η γραμμική άλγεβρα, η θεωρία συνόλων και οι συναρτήσεις είναι κοινή γλώσσα της οικονομικής θεωρίας.