Μαθηματικός Λογισμός Ι

8η Διάλεξη

(Παραδείγματα στο κεφάλαιο των Παραγώγων).

Κανόνες De l'Hospital.

① $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-b^x)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b$$

② $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(3^x-2^x)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left[(3^x-2^x)^2\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2(3^x-2^x)\cdot(3^x\ln 3-2^x\ln 2)}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\left[3^x\ln 3-2^x\ln 2\right]^2+(3^x-2^x)\left[3^x(\ln 3)^2-2^x(\ln 2)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left[\ln 3-\ln 2\right]^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left[\ln\frac{3}{2}\right]^2}=\left[\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\right]^4$$

③ $$\lim_{x\to a^+}\frac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+(x-a)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-a^2)^{1/2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}=\dots=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Να βρείτε τα παρακάτω όρια.

α) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x} - 1}{1 - \cos x} = \dots = 2$$

β) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[n]{x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x\sqrt{1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n}}} - x \right) = \dots = \frac{a_{n-1}}{n}$$

γ) $$\lim_{x \to +\infty} x \left(b^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \dots = \ln b$$

δ) $$\lim_{x \to +\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \dots = 1$$

ε) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{k}} = \dots = +\infty \quad (k \in \mathbb{N})$$

k σταθερά

(Επαγωγικά, δηλ. αποδεικνύω για k=1
δέχομαι ότι ισχύει για k=n
και αποδεικνύω ότι ισχύει για k=n+1

Παράδειγμα (Παράγωγος πεπλεγμένης)

Έστω η παρακάτω πεπλεγμένη συνάρτηση.

Να βρεθεί η εφαπτομένη στο σημείο $(1,1)$

$$xy^3+5y^2-x^3y^2=7x^2-2y$$

Λύση

$$F(x,y)=xy^3+5y^2-x^3y^2-7x^2+2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^3-3x^2y^2-14x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3xy^2+10y-2x^3y+2$$

Συνεπώς έχουμε με βάση τον τύπο

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right|_{(1,1)}=-\left.\frac{y^3-3x^2y^2-14x}{3xy^2+10y-2x^3y+2}\right|_{(1,1)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=-\frac{-16}{13}=\frac{16}{13}$$

άλλος τρόπος

Σφόσον $y = f(x)$ δηλ. η y είναι συνάρτηση του x, έχουμε

π.χ. $(5y^2)' = (5[f(x)]^2)' = 10 f(x) \cdot f'(x)$
$= 10 y y'$

ως ηλ.

$(xy^3 + 5y^2 - x^3y^2 - 7x^2 + 2y)' = (0)' \Rightarrow$

$\boxed{(xy^3)'} + (5y^2)' - (x^3y^2)' - (7x^2)' + (2y)' = 0 \Rightarrow$

$\downarrow$

$\boxed{((x)'y^3 + x(y^3)')}$

$\downarrow$

$1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y'$ ' ' '

και λύνω ως προς $y' = \frac{\cdots}{\cdots}$

Παράδειγμα (Ανάπτυγμα Taylor)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$

Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}$

Παρατηρώ ότι υπάρχει η $f^{(n)}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ο τύπος είναι ο εξής

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

οπότε $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

Σχ. $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(0) = -6$ $f^{(5)}(0) = 24$ ...

Το ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=\ln(1+x)$

π.χ. για $n=4$ δίνεται παρακάτω.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{\xi^5}{5}$$

όπου $\xi \in (0,x)$.

Γενικά (θα το δούμε πιο αναλυτικά στις Δυναμοσειρές)

η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$

μπορεί να γραφεί ως άπειρο άθροισμα

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{για } x \in (-1, 1)$$

Παράδειγμα: Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει αυτοκίνητα δύο τύπων. Το αυτοκίνητο τύπου Α απαιτεί 100 εργατοώρες για την κατασκευή του ενώ το αυτοκίνητο τύπου Β απαιτεί 150 εργατοώρες. Κάθε μέρα είναι διαθέσιμες 3.000 εργατοώρες. Το κέρδος από την πώληση των αυτοκινήτων X από την κατηγορία Α και Y από την κατηγορία Β δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\text{Κέρδος} = K(x,y) = 10^6 - [1000x^2 + 2000y^2]$$

Να βρεθεί το βέλτιστο επίπεδο παραγωγής (x,y) για τα αυτοκίνητα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.