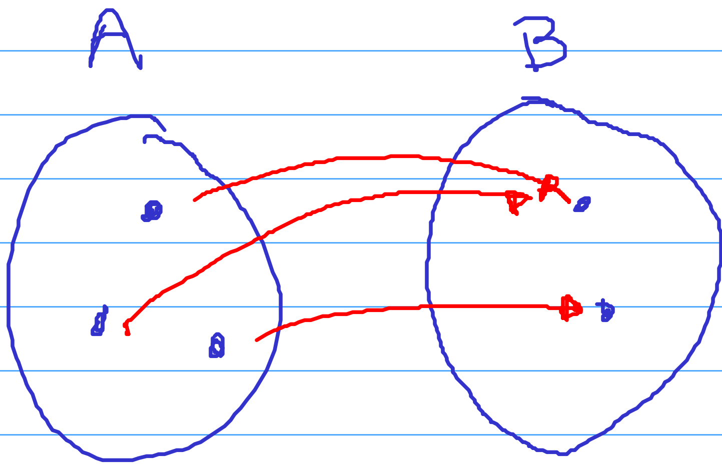
Μαθηματικός

Λογισμός I

(6η διάλεξη)

Όρια & Συνέχεια Συναρτήσεων.



Όριο Συνάρτησης

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7$$

(1) Το x είναι "κοντά" στο 2 τότε το $f(x)$ είναι "κοντά" στο 7 ΣΩΣΤΟ

το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει

(2) Πολλές τιμές του $f(x)$ όταν το x πλησιάζει το 2 βρίσκονται κοντά στο 7 ΣΩΣΤΟ

ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο

(3) Άπειρες τιμές του $f(x)$ βρίσκονται κοντά στο 7 όταν το x πλησιάζει στο 2 ΣΩΣΤΟ

Δεν ισχύει το αντίστροφο

$$f(x)=\begin{cases} 7, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = ;$ ΔΕΝ υπάρχει

όμως κοντά στο 2 άπειρες τιμές της f παίρνουν την τιμή 7.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{\text{ορσ}}{\iff}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: για κάθε x

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ συνεπάγεται

ότι $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7$$

Για οποιαδήποτε περιοχή του 7

$A = (6{,}99 \, , 7{,}01)$ $\quad (6{,}9999 \, , 7{,}0001)$

μπορώ να βρω περιοχή του 2

$B = (1{,}99999999 \, , 2{,}00000001)$

$$f(B) \subseteq A.$$

$$\ell = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\ell \in \mathbb{R}$

Επεκταση και για $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$

και για $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$

Συνέχεια Συναρτήσεων

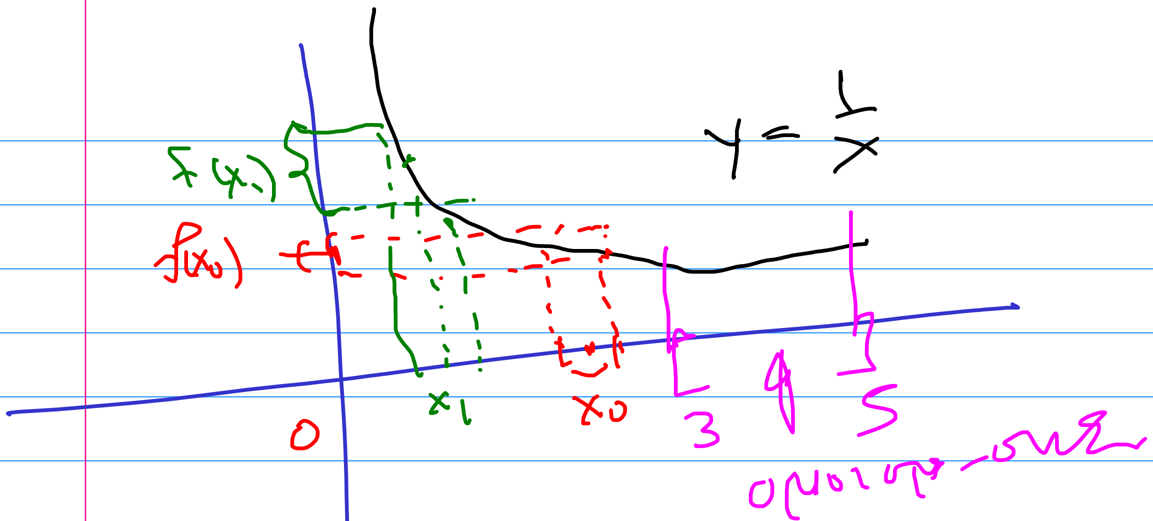
Ορισμός 1: Έστω συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ και σημείο $x_0 \in D$ τότε η f συνεχής στο x_0 $\overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in D$ και $|x - x_0| < \delta$ έχουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Δηλαδή, όταν το x βρίσκεται κοντά στο x_0 τότε το $f(x)$ βρίσκεται κοντά στο $f(x_0)$.

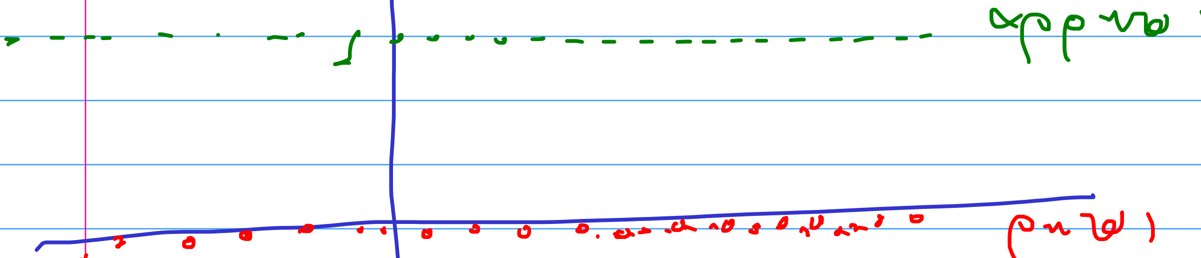
Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις τότε $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 1: Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in D$

f συνεχής στο x_0 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$ με $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$



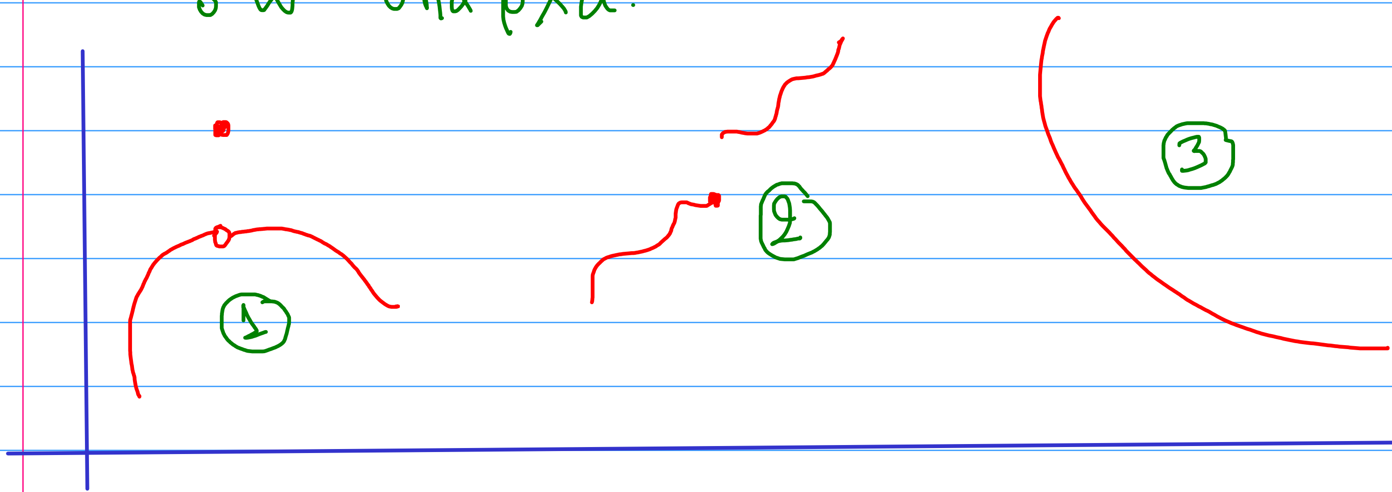
Δεν μπορώ να βρω διάστημα (α, b) που να περιέχει μόνο ρητούς ή μόνο άρρητους

Ορισμός 2: "ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ" τρεις περιπτώσεις

(1) $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$

(2) $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$

(3) Τουλάχιστον ένα από τα δύο πλευρικά όρια δεν υπάρχει.



Ορισμός 3: αριστερή & δεξιά συνέχεια

$f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ $\qquad$ $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

f συνεχής $\qquad f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$

Θεώρημα 2: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

τότε ισχύουν τα κάτωθι

(i) f φραγμένη στο $[\alpha,b]$

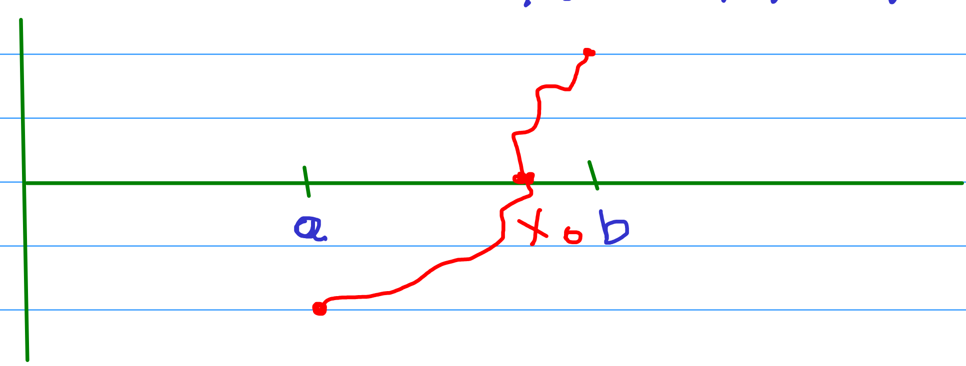
(ii) $\exists x_0 \in [\alpha,b]$: $f(x_0) = \sup\{f(x), \alpha \le x \le b\}$

(iii) $\exists x_1 \in [\alpha,b]$: $f(x_1) = \inf\{f(x), \alpha \le x \le b\}$

Θεώρημα 3: (Bolzano - Weierstrass)

Έστω $f:[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$f(\alpha)\cdot f(b) < 0$ τότε $\exists x_0 \in (\alpha,b)$: $f(x_0) = 0$



Θεώρημα 4: Έστω $f:[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$f(\alpha) < f(b)$ και $c \in (f(\alpha), f(b))$

τότε $\exists x_0 \in (\alpha,b)$: $f(x_0) = c$

(ομοίως ισχύει ανάλογο αποτέλεσμα για $f(\alpha) > f(b)$)

Ομοιόμορφη Συνέχεια

Ορισμός 4: Έστω $f: D \to \mathbb{R}$

f ομοιόμορφα συνεχής στο D $\overset{\text{ορσ}}{\iff}$ $\left[\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x,y \in D \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right]$

Πρόταση 1: f ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής

Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει

Πρόταση 2: $f:[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,b]$ τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής

Πρόταση 3: $f: D \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής

$\iff$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπω $x_n, y_n \in D$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n) - f(y_n)| = 0$

Ασκήσεις

① Εξετάστε τη συνέχεια των παρακάτω συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού τους.

a. $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

b. $f_2(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$

c. $f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Λύσεις (Υποδείξεις).

α. $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3$

άρα ασυνεχής

b. $\lim_{x \to 0} \eta\mu x = 0 = f_2(0)$ άρα συνεχής

c. Επειδή $\mathbb{Q}$ πυκνό σύνολο $\exists$ ακολουθία ρητών $q_n \to \sqrt{3}$

$f_3(q_n) = 1 \neq f(\sqrt{3}) = 0$ άρα ασυνεχής.

$(0, 20)$

(2) Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής

Λύση: Έστω οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n+1}$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

όμως $f(a_n) - f(b_n) = n - (n+1) = -1 \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$

άρα η f **ΔΕΝ** είναι ομοιόμορφα συνεχής

(3) Έστω $f: [a, b] \to [a, b]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = x_0$ [θεώρημα σταθερού σημείου].

Λύση Αν $f(\alpha) = \alpha$ ή $f(b) = b$ τότε ισχύει

Υποθέτω ότι $a < f(a)$ και $f(b) < b$

Ορίζω τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ τότε

g συνεχής στο $[\alpha, b]$
$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha > 0$ και
$g(b) = f(b) - b < 0$

$\xRightarrow{\text{Bolzano}}$ $\exists\, x_0 \in (\alpha, b)$ $g(x_0) = 0$

$f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$