Μαθηματικός Λογισμός Ι

(3η διάλεξη)

Μιγαδικοί Αριθμοί (Ασκήσεις)

(1) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις του i

(2) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση.

$$z\cdot\bar{z} - (\varphi\bar{z} + \bar{\varphi}z) + r = 0$$

όπου $\varphi \in \mathbb{C}$ και $r \in \mathbb{R}$.

(3) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^6 = 64$$

(4) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^{12} + 2z^6 + 2 = 0$$

(5) Η παρακάτω εξίσωση έχει ρίζα τον $\varphi \in \mathbb{C}$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

τότε θα έχει και ρίζα τον $\bar{\varphi}$ (συζυγή)

Άσκηση 1

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε

$$i^{4k+\lambda} = \begin{cases} 1 & , \lambda = 0 \\ i & , \lambda = 1 \\ -1 & , \lambda = 2 \\ -i & , \lambda = 3 \end{cases} \quad , k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

π.χ. $i^{163} = i^{160+3} = i^{4\cdot 40+3} = (i^4)^{40} \cdot i^3$

$= 1^{40} \cdot i^3 = -i$

Άσκηση 2

Θέτω $z=x+yi$ και $\varphi=\alpha+bi$, $x,y,\alpha,b\in\mathbb{R}$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\varphi\bar{z}+\bar{\varphi}z=\varphi\bar{z}+\overline{\varphi\bar{z}}=2Re(\varphi\bar{z})$$

όπου $Re(\varphi\bar{z})$ το πραγματικό μέρος του $\varphi\bar{z}$

όμως $\varphi\bar{z}=(\alpha x+by)+(\alpha x-by)i$

Άρα η αρχική μας εξίσωση γράφεται

$$|z|^2-2Re(\varphi\bar{z})+r=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2(\alpha x+by)+r=0\Rightarrow$$

$$[x^2-2\alpha x+\alpha^2]+[y^2-2by+b^2]=\alpha^2+b^2-r\Rightarrow$$

$z=x+yi$ $(x-\alpha)^2+(y-b)^2=\alpha^2+b^2-r$

επειδή $r<|\varphi|^2$ δηλ. $r<\alpha^2+b^2\Rightarrow\alpha^2+b^2-r>0$

συνεπάγεται ότι ο γ.τ. του z είναι

ένας κύκλος με κέντρο το (α,b) και ακτίνα $\rho=\sqrt{\alpha^2+b^2-r}$

Άσκηση 3

Το 64 γράφεται $64 = 2^6 \cdot (\sigma\upsilon\nu 0 + i\,\eta\mu 0)$.

Άρα σύμφωνα με τον τύπο του De Moivre οι ρίζες της εξίσωσης $\boxed{z^6 = 64}$ είναι

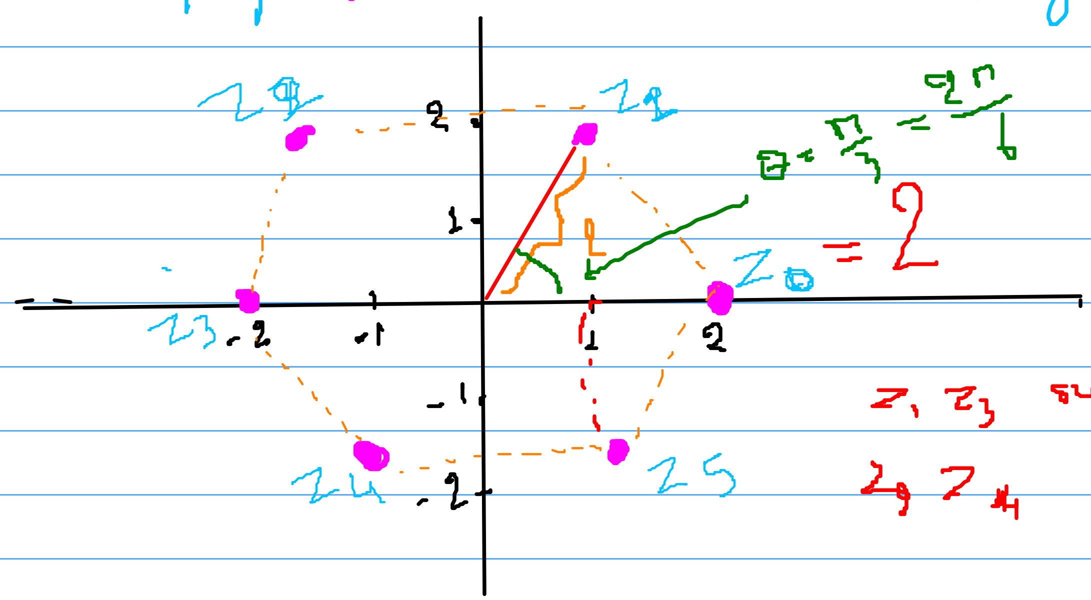
$$z_\nu = \sqrt[6]{2^6}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu\pi}{6} + i\,\eta\mu\frac{2\nu\pi}{6}\right],\quad \nu = 0, 1, \dots, 5$$

ή αναλυτικά

Έξι ρίζες

$$\begin{cases} z_0 = 2\left[\sigma\upsilon\nu 0 + i\,\eta\mu 0\right] = 2. \\ z_1 = 2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{6} + i\,\eta\mu\frac{2\pi}{6}\right] = 2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{3}\right] \\ \vdots \\ z_5 = 2\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\cdot 5\pi}{6} + i\,\eta\mu\frac{2\cdot 5\pi}{6}\right] \end{cases}$$

Γεωμετρικά μπορούμε να δούμε τις ρίζες ως κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου.



z_1, z_3 συζυγείς

z_2, z_4 ''

Άσκηση 4

Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$(z^6)^2 + 2z^6 + 2 = 0$$

ή $\left(z^6 = w \text{ και } w^2 + 2w + 2 = 0\right)$

Λύνω το τριώνυμο και έχω ότι

$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 < 0$ άρα έχει μιγαδικές ρίζες

$$w_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i \to \begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$$

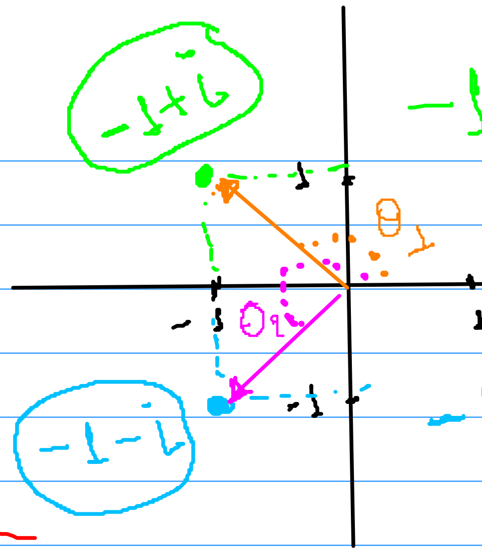
οπότε θα έχουμε ότι

$w_1 = z^6 = -1 + i$ (1) ή $w_2 = z^6 = -1 - i$ (2)

Λύνω την εξίσωση (1) χρησιμοποιώντας τον τύπο του De Moivre.

Πρέπει να γράψω σε πολική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς $-1+i$, $-1-i$

Θα χρησιμοποιήσω τους τύπους της θεωρίας και μια γεωμετρική οπτική



$$-1+i=\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}+i\,\eta\mu\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$-1+i=\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}+i\,\eta\mu\frac{5\pi}{4}\right]$$

$$\sqrt{2}=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}\quad,\quad \theta_1=\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{-1}\right)=\tau o\xi\varepsilon\varphi(-1)\Rightarrow\theta_1=\frac{3\pi}{4}$$

Συνεπώς η αρχική εξίσωση έχει συνολικά 12 (6+6) ρίζες.

$$Z_\nu=\sqrt[6]{\sqrt{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu\pi+\frac{3\pi}{4}}{6}+i\,\eta\mu\frac{2\nu\pi+\frac{3\pi}{4}}{6}\right]\quad \nu=0,1,\dots,5$$

$$Z_\kappa=\sqrt[6]{\sqrt{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}}{6}+i\,\eta\mu\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}}{6}\right]\quad \kappa=0,1,\dots,5$$

οι ρίζες βρίσκονται πάνω στις κορυφές ενός κανονικού δωδεκαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[6]{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{12}}$

Άσκηση 5

Εφόσον $\varphi \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της εξίσωσης θα ισχύει

$$a_\nu \cdot \varphi^\nu + a_{\nu-1}\varphi^{\nu-1} + \dots + a_1\varphi + a_0 = 0 \quad (1)$$

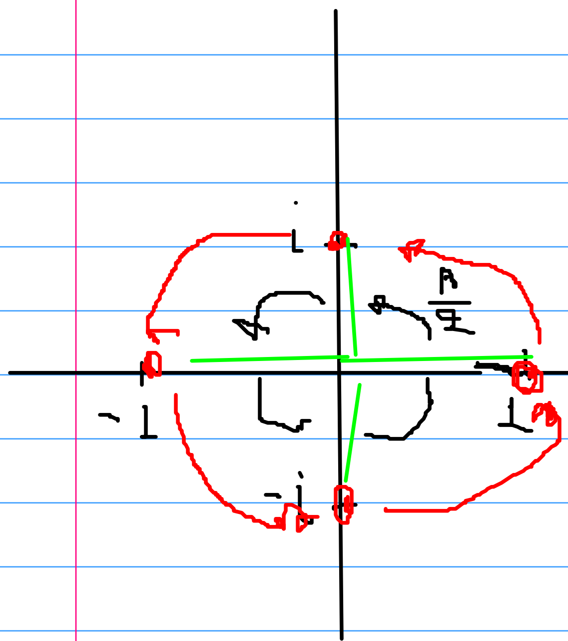
Λαμβάνουμε τα συζυγή και τα δύο μέρη της εξίσωσης (1)

$$\overline{a_\nu \cdot \varphi^\nu + a_{\nu-1}\varphi^{\nu-1} + \dots + a_1\varphi + a_0} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\overline{a_\nu} \cdot \overline{\varphi^\nu} + \overline{a_{\nu-1}}\,\overline{\varphi^{\nu-1}} + \dots + \overline{a_1}\,\overline{\varphi} + \overline{a_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_\nu \cdot \overline{\varphi}^\nu + a_{\nu-1}\overline{\varphi}^{\nu-1} + \dots + a_1\overline{\varphi} + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$\overline{\varphi}$ ρίζα της αρχικής εξίσωσης



πολ/σμος = περιστρ

$2^4 = 16$ $\quad 2^6 = 64$ $\quad 2^8 = 256$

πραγματικοί

$$\varphi \bar{z} + \bar{\varphi} z = (a+bi)(x-yi) + (a-bi)(x+yi)$$
$$= \dots = 2(ax+by)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \bar{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

συν = cos, ημ = sin, εφ = tan

τοξσυν = $\cos^{-1}$, ... τοξεφ = $\tan^{-1}$