Μαθηματικός Λογισμός I

22η Διάλεξη

(Γενικές Επαναληπτικές Ασκήσεις)

## ① Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων

α. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(\cos^2 x+\sin^2 x)-\sin^2 x}\,dx$

$= \dots$ αντικατάσταση $u = \tan x$ $=$

Υπενθύμιση

$du = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$= \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2+2}\,du =$

$= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{a} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

β. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = \int (x)' \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx =$

$= \dots = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx - \sqrt{x^2-1} + c$

γ. $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

$= \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \dots = -\frac{4}{3}$

## 2 Σειρές

**α'** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

$a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 1 \neq 0$

άρα η σειρά αποκλίνει

**β'** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 7}{n^4 - 3n^3 + n - 1}$

Θεωρώ $b_n = \frac{1}{n}$ και εφαρμόζω κριτήριο σύγκρισης

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ άρα ίδια συμπεριφορά σύγκλισης

οπότε η σειρά αποκλίνει

**γ'** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ κριτήριο ρίζας

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = 0$$

άρα η σειρά συγκλίνει

(δ) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n^2}$

(i) συγκλίνει ναι ή όχι;

(ii) Εάν ναι, να προσεγγισθεί η αριθμητική τιμή με ακρίβεια 0,001

Κριτήριο ολοκλήρωσης

(i) $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx \underset{dy=2xdx}{\overset{y=x^2}{=\!=}} \dots \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^a = \frac{1}{2e} < 1$

άρα η σειρά συγκλίνει.

(ii) μέγιστο σφάλμα προσέγγισης $\approx \int_n^\infty xe^{-x^2}dx \le 0.001$

$\int_n^\infty xe^{-x^2}dx = \dots = \frac{1}{2}e^{-n^2} \le 0.001 \Rightarrow e^{-n^2} \le 0.002$

$\Rightarrow \frac{1}{e^{n^2}} \le 0.002 \Rightarrow e^{n^2} \ge 500 \Rightarrow n^2 \ge \ln 500$

$\Rightarrow n^2 \ge 6,21 \Rightarrow n \ge 2,49 \Rightarrow n_0 = 3$

$\sum_{n=1}^\infty ne^{-n^2} \approx \sum_{n=1}^{3} ne^{-n^2} = e^{-1} + 2e^{-4} + 3e^{-9}$