Μαθηματικός Λογισμός Ι

(20η Διάλεξη)

Γενικές Επαναληπτικές Ασκήσεις

Θέμα 1ο (A)

$$\boxed{\frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\sin(x^2)\,dx} \xlongequal[du=2x\,dx]{u=x^2} \frac{1}{2}\int e^{u}\sin u\,du \quad (1)$$

Υπολογισμός

$$\int e^{u}\sin u\,du \xlongequal[\text{ολοκλήρωση}]{\text{παραγοντική}} \int (e^{u})'\sin u\,du =$$

$$= e^{u}\sin u - \int e^{u}(\sin u)'\,du =$$

$$= e^{u}\sin u - \int e^{u}\cos u\,du =$$

$$= e^{u}\sin u - \int (e^{u})'\cos u\,du =$$

$$= e^{u}\sin u - \left[e^{u}\cos u + \int e^{u}\sin u\,du\right]$$

$$\int e^{u}\sin u\,du = e^{u}\sin u - e^{u}\cos u - \int e^{u}\sin u\,du \Rightarrow$$

$$\int e^{u}\sin u\,du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\sin u - e^{u}\cos u\right] + C \quad (2)$$

$$(1) \xRightarrow{(2)} \int x e^{x^2}\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\left[e^{x^2}\sin(x^2) - e^{x^2}\cos(x^2)\right] + C$$

Θέμα 1ο (Β)

Υπολογισμός

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3+x}\,dx} \quad (1)$$ (ανάλυση σε απλά κλάσματα).

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \;\; \frac{u=x^2+1}{du=2x\,dx} \;\; \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$(2) \Rightarrow \int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Θέμα 1ο (Γ)

Υπολογισμός

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x\,dx} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx =$$

$$\underset{du=-\sin x\,dx}{\overset{u=\cos x}{=\!=}} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -(1-u^2)^2 du = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-1+2u^2-u^4)\,du$$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \left[-u+\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right)-\left(-1+\frac{2}{3}1^3-\frac{1}{5}1^5\right)$$

$$= -\frac{43\sqrt{2}}{120}+\frac{8}{15} = \frac{64-43\sqrt{2}}{120}.$$

Θέμα 2ο (A)

Συγκλίνει;

- $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{1+(-2)^n+2^n}}$$

$$a_n = \frac{n^4}{1+(-2)^n+2^n}$$

Η σειρά αποκλίνει! Εφόσον η ακολουθία $a_n = \frac{n^4}{1+(-2)^n+2^n}$ αποκλίνει. Πράγματι η υπακολουθία των περιττών όρων

$$a_{2k+1} = \frac{(2k+1)^4}{1+(-2)^{2k+1}+2^{2k+1}} = \frac{(2k+1)^4}{1+0} = (2k+1)^4$$

απειρίζεται. Εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ συνεπάγεται ότι η σειρά αποκλίνει.

Συγκλίνει;

- $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{2^n}}}$$

$$a_n = \frac{n^3}{\sqrt{2^n}}$$

Η σειρά συγκλίνει! Χρησιμοποιώ το κριτήριο του πηλίκου. Δηλαδή σχηματίζω

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 / 2^{\frac{n+1}{2}}}{n^3 / 2^{\frac{n}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\cdot\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

και αποδεικνύω ότι $\rho < 1$ άρα η σειρά συγκλίνει.

Συγκλίνει;

- $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left[0{,}0001+(-1)^n\right]}$$

$$a_n = 0{,}0001+(-1)^n$$

Η σειρά αποκλίνει! Εφόσον η αντίστοιχη ακολουθία $a_n = 0{,}0001+(-1)^n$ δεν συγκλίνει. Πράγματι,

Για $n=2k$ $a_{2k} = 0{,}0001+(-1)^{2k} = 1{,}0001$

Για $n=2k+1$ $a_{2k+1} = 0{,}0001+(-1)^{2k+1} = -0{,}9999$.

$$1{,}0001 = \lim_{k\to\infty} a_{2k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -0{,}9999$$

Θέμα (2ο) (B)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = \;;}$$

Να υπολογισθεί ακριβώς η αριθμητική τιμή της σειράς.

$$\frac{4}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \Rightarrow \dots \Rightarrow A=2 \text{ και } B=-2$$

οπότε το μερικό άθροισμα αναλύεται ως ακολούθως

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1}\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}\right) =$$

$$= 2 + 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

$$= 3 - \frac{4n+6}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{n^2+3n+2} = 3$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = 3$$

Θέμα 3ο

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης του (Α) προσδιορίζεται από την εξίσωση f(x) μεταξύ των σημείων με τετμημένες $x=1$ και $x=3$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}}$$

όπου $f'(x) = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$ — Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2} = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left[x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right]} =$$

$$= \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right]^2} = \int_1^3 \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right)\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1}{1}\right)\right] = \frac{14}{3}$$

Το μήκος της καμπύλης είναι $\frac{14}{3}$.

Θέμα 3ο

(Β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot e^x}{\cos x - 1} = ;$

Το .... παρακάτω όριο αποτελεί απροσδιοριστία και θα τη αντιμετωπίσουμε με ανάλυση Taylor.

Γενικά έχουμε τους εξής τύπους.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Αναλύουμε το όριο ως εξής

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot e^x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots}{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} \cdot \frac{\text{διαιρώ με}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^2 + \cdots} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Θέμα 4ο

Υπολογίστε (Α) προσεγγιστικά τα ολοκληρώματα $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ χρησιμοποιώντας 3 όρους από το ανάπτυγμα Taylor.

• Αναλύουμε το $e^{-x^2} = \underbrace{1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!}} + \cdots$

και διατηρούμε τους τρεις πρώτους όρους οπότε έχουμε

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \simeq \int_0^1 \left(1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{10} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{30 - 10 + 3}{30} = \frac{23}{30}.$$

• Αναλύουμε το $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$

$$\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{x}dx \simeq \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)dy = \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[\pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600}\right].$$

Υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτομένης (B) στο σημείο (0,0) της καμπύλης που δίνεται από την $\boxed{x^2y^3+3y^2=x-4y}$

Θέμα 4ο

Θέτω $F(x,y)=x^2y^3+3y^2-x+4y$.

Η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ στο σημείο (0,0) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3-1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2+6y+4.$$

Άρα $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy^3}{3x^2y^2+6y+4} \xRightarrow{(x,y)=(0,0)} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{4}.$$

Εναλλακτικά: παραγωγίζω τη σχέση θεωρώντας την $y=y(x)$ και εφαρμόζω τον κανόνα αλυσίδας στη σύνθετη συνάρτηση

$$(x^2y^3+3y^2)' = (x-4y)' \Rightarrow$$

$$(x^2y^3)' + (3y^2)' = (x)' - (4y)'$$

$$2xy^3 + x^2 3y^2 \cdot y' + 6yy' = 1-4y' \Rightarrow$$ Λύνω ως προς y'

$$y' = \frac{1-2xy^3}{3x^2y^2+6y+4}$$ ... όπως πάλι βρίσκω $\left. y'(x)\right|_{x=0} = \frac{1}{4}$.

Η εξίσωση $y-0 = \left.y'(x)\right|_{(0,0)}(x-0)$

$$\boxed{y=\frac{1}{4}x}$$