Μαθηματικοί Λογισμοί I

(18η Διάλεξη)

Δυναμοσειρές

(Μέρος Α΄)

Μια δυναμοσειρά είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

"μοιάζει" δηλαδή με μια σειρά! το ίδιο και η διατύπωση της σύγκλισης της.

Η πιο απλή μορφή της είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

δηλαδή θέτουμε $a_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Παρατηρούμε ότι, $1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

$$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n = a\,\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \overset{*}{=} \frac{1}{1 - x}$$

* για τιμές του x όπου $|x| < 1$

Για $x=0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n}$ Για $x=4$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

Παράδειγμα: Να διερευνήσετε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\alpha_n} \underbrace{(x-3)^n}_{x^n}$$

Για $x \in [2,4)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει

Λύση: Εφαρμόζω το κριτήριο του λόγου για να διερευνήσω τη σύγκλιση της δυναμοσειράς.

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}}\right| = \frac{n}{n+1}|x-3| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x-3|$$

- Συνεπώς, εάν $|x-3|<1$ δηλ. για $x \in (2,4)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει. Το σημείο 3 χαρακτηρίζεται κέντρο σύγκλισης ενώ το 1 χαρακτηρίζεται ακτίνα σύγκλισης
- Εάν $|x-3|>1$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει

• Στις ειδικές περιπτώσεις $|x-3| = 1$

δηλαδή για $x = 2$ και $x = 4$

έχουμε τις σειρές

$x=2 \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

$x=4 \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Διάστημα σύγκλισης $x \in [2,4)$

<u>Παράδειγμα</u>: Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά την παρακάτω συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$ $\quad \int \frac{1}{1+x^2} dx$

<u>Λύση</u> $\quad \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots$$

$\underline{a_n = (-x^2)^n}$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \approx \int (1 - x^2 + x^4 - x^6)$$

$|x^2| < 1$

$|x^2| < 1$

$$1 + (2x-x^2) + (2x-x^2)^2 + (2x-x^2)^3 + \dots$$

$$1 + 2x + 3x^2 + $$

Παράδειγμα: Να αναλύσετε σε δυναμοσειρά την παρακάτω συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-(2x-x^2)}$$

Λύση Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots$$

Άρα συνδυάζοντας τα δύο έχουμε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

οπότε τελικά $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \dots$

Παράδειγμα Να αναλύσετε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση

$$f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$$

Λύση Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

από προηγούμενο παράδειγμα

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\,dx$$

$$= c + \sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

και επειδή $\tau o\xi\varepsilon\varphi 0 = 0$ έχουμε $c = 0$

οπότε τελικά

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Βασικό Τυπολόγιο

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Εφαρμογές Δυναμοσειρών

1. Υπολογισμοί ορίων

2. Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\dots\right)=\frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\dots}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\dots\right]=1.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να προσεγγισθεί η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος (χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους της σχετικής δυναμοσειράς).

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx$$

<u>Λύση</u>

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\dots\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2\cdot 2!}-\frac{x^4}{4\cdot 4!}+\frac{x^6}{6\cdot 6!}\right]_0^1$$

άρα η αριθμητική τιμή είναι

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{96}+\frac{1}{4320}.$$