Μαθηματικά Λογισμός I

(15η Διάλεξη)

Ολοκλήρωμα

Μέρος Ζ' : Εφαρμογές Ολοκληρωμ.
(Επιχειρήσεις/Οικονομία)

Επιχειρήσεις (Διακριτό μοντέλο)

Μια βιομηχανία παραγωγής αναψυκτικών παράγει φιάλες (αναψυκτικών) με φθίνοντα ρυθμό μέσα στη διάρκεια της ημέρας. Συγκεκριμένα, ξεκινάει την παραγωγή στις 7 πμ με παραγωγή 15.0000 φιαλών και συνεχίζει παράγοντας 1000 φιάλες λιγότερες κάθε ώρα που περνάει και σταματάει την παραγωγή στις 5μμ. Να βρείτε πόσες φιάλες συνολικά παράγει κάθε ημέρα.

1η ώρα 7:00 – 8:00 = 15.000

2η ώρα 8:00 – 9:00 = 14.000

3η ώρα 9:00 – 10:00 = 13000

⋮

9η ωρ. 3:00 – 4:00 = 7.000

10η ωρ. 4:00 – 5.00 = 6.000 +

Σύνολο 105.000 φιάλες

Επιχειρήσεις (συνεχές μοντέλο)

Θεωρούμε την προηγούμενη βιομηχανία με την εξής διαφοροποίηση. Ο ρυθμός παραγωγής φιαλών αναψυκτικών είναι φθίνων και δίνεται από τον μαθηματικό τύπο

$$\Pi(t) = 15000 - 1000t, \quad 0 \le t \le 10$$

Να υπολογίσετε πόσες φιάλες αναψυκτικών συνολικά θα κατασκευαστούν μέσα σε μια ημέρα (10 ώρες παραγωγής).

$$\left[\text{Συνολική παραγωγή}\right] = \int_0^{10} (15000 - 1000t)\, dt$$

$$= \left[15000t - 1000\frac{t^2}{2}\right]_0^{10} =$$

$$= 15000 \cdot 10 - 1000\frac{10^2}{2} =$$

$$= 150.000 - 50000 = \boxed{100.000}$$

Παρατήρηση: (συνεχές) 100 000 έναντι 105 000 (διακριτό)

Οικονομικά (Διακριτό μοντέλο.)

100 € $\longrightarrow$ $100(1+i)^n$

0 1 2 3 4 ... n

ανατοκισμός χρημάτων με σταθερό επιτόκιο i για n περιόδους

Εάν καταθέσω σήμερα 100 € στην Τράπεζα με σταθερό επιτόκιο i τότε μετά από ένα έτος θα έχω

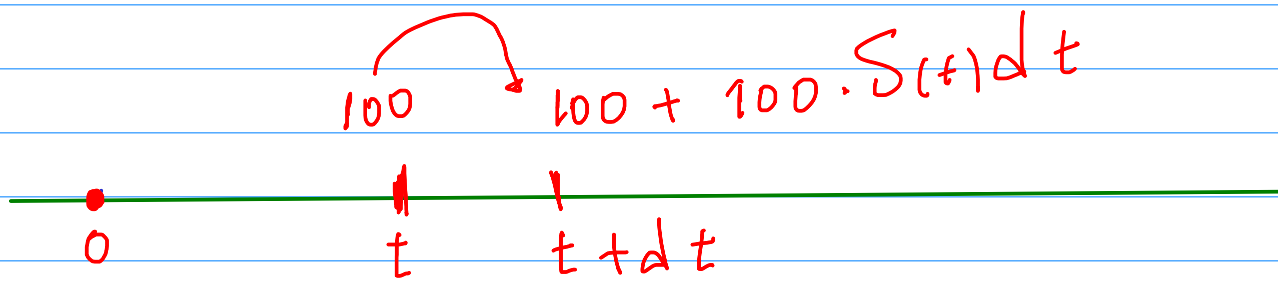
$$\underbrace{100}_{\text{κεφάλαιο}} + \underbrace{100 \cdot i}_{\text{τόκος}} = 100(1+i)$$

και διαδοχικά μετά από n έτη θα έχουμε $100(1+i)^n$

για $i = 2\%$ και $n = 10$ τότε έχω

$$100(1+0.02)^{10} = 100 \cdot 1.02^{10} = 121,90 €$$

Οικονομία [Συνεχές Μοντέλο]



Ο τόκος για το στοιχειώδες διάστημα dt είναι $\boxed{100 \cdot \delta(t) \cdot dt}$

όπου $\delta(t)$ είναι ο ρυθμός απόδοσης τόκου τη χρονική στιγμή t.

(το $\delta(t)$ ονομάζεται ένταση ανατοκισμού)

Τότε αποδεικνύεται ότι

Εάν καταθέσω 100 € σήμερα στην Τράπεζα μετά από n έτη θα έχω

$$100\, e^{\int_0^n \delta(t)\,dt}$$

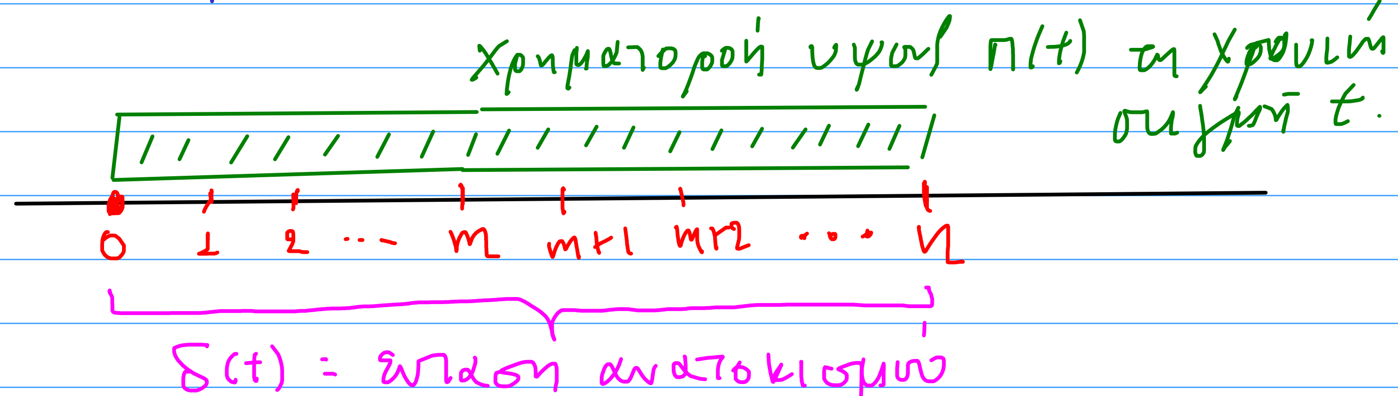
Παράδειγμα: Έστω $\delta(t) = 2\%$ τότε η συσσώρευση των 100€ μετά από 10 έτη θα είναι

$$100\, e^{\int_0^{10} 0.02\, dt} = 100\, e^{0.02 \cdot 10} = 100\, e^{0.2} = \underline{\underline{122,14\ €}}$$

Σημείωση: Προσέξτε ότι η

- συσσώρευση στο διακριτό είναι 121,90 €
- " " συνεχές " 122,14 €

Γενικό μοντέλο προεξόφλησης Χρηματοροής.



$$\begin{bmatrix}\text{Παρούσα} \\ \text{αξία} \\ \text{τη στιγμή } 0\end{bmatrix} = \int_0^n \Pi(t)\cdot e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds}\,dt$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η παρούσα αξία μια 10-ετούς χρηματοροής $\Pi(t) = 1000$ € (σταθερός ρυθμός πληρωμών 1000 € ετησίως) και επιτόκιο σταθερό 2% (ένταση ανατοκισμού)

Λύση

$$\int_0^{10} 1000\cdot e^{-\int_0^t 0.02\,ds}\,dt = 1000\int_0^{10} e^{-0.02t}\,dt$$

$$= 1000\left[\frac{e^{-0.02t}}{-0.02}\right]_0^{10} = 50000\left[1 - e^{-0.2}\right] =$$

$$= \boxed{9.063{,}46 \text{ €}}$$