Μαθηματικός Λογισμός Ι

(13η Διάλεξη)

(Ολοκλήρωμα)

Μέρος Ε΄: Γενικευμένα Ολοκληρώματα και παραδείγματα

Επανάληψη!

Γενικά στο ολοκλήρωμα Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

έχουμε δύο βασικές υποθέσεις

- το διάστημα ολοκλήρωσης είναι φραγμένο
- η f είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του παραπάνω ολοκληρώματος και στις περιπτώσεις όπου μία από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει.

Έτσι έχουμε τα εξής γενικευμένα ολοκληρώματα για f συνεχή συνάρτηση.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx}_{\text{ορίζεται όπως προηγουμένως}} + \underbrace{\int_{z}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{ορίζεται όπως προηγ.}}$$

Παραδείγματα

① $$\int_0^{+\infty} e^{-7x}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{7}e^{-7x}\right)' dx = \left[-\frac{1}{7}e^{-7x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{7}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-7x} - e^{-7\cdot 0}\right]$$

$$= -\frac{1}{7}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{7}$$

---

② $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1$$

$$= +\infty - 0 = +\infty$$

---

③ $$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \sin x - \sin 0$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sin x - 0 = \lim_{x\to+\infty} \sin x$$

ΔΕΝ υπάρχει!

Γενικά εάν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα

$f : (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Παρόμοια ορίζονται και το ολοκλήρωμα.

$\int_a^b f(x)\,dx$ όταν η f ορίζεται στο διάστημα $[\alpha, b)$ ή (α, b)

Γενικά μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μια συνάρτησης (συνεχούς) η οποία ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων. Σημείωση και η συνάρτηση θα μπορούσε να μην είναι και φραγμένη.

Γενικό Σχόλιο

[Ολοκλήρωμα Riemann] ? [Ολοκλήρωμα Lebesgue]

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Riemann στο διάστημα [0,1] της παρακάτω συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ άρρητος}\\ 0, & x \text{ ρητός}\end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \underset{\text{Riemann}}{\overset{\text{ολοκληρ}}{=}} \quad \text{ΔΕΝ υπάρχει}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \quad \underset{\text{Lebesgue}}{\overset{\text{ολοκληρ.}}{=}} \quad 1 \ (\text{εκτός ύλης})}$$

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα από όλη την προηγούμενη θεωρία των τεχνικών ολοκλήρωσης

① $$\int \frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^2(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x-2)} + 2\ln|x+3| + \frac{5}{x+3}$$

② $$\int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[x^2(x^2+x+1)\right] - \frac{3x+2}{x^2+x+1} - \frac{13}{\sqrt{3}}\,\text{τοξεφ}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

③ $$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{Θέτω } t=\sqrt{x-1} \\ x=1+t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt\end{array}\right]$$

$$= x-1+4\sqrt{x-1}+2\ln\left(x-\sqrt{x-1}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{τοξεφ}\,\frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3}}$$

για $x \in (1,+\infty)$

④ $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\begin{array}{l}\text{Θέτω } x = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\end{array}\right]$$

$$= \ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$$