

Μαθηματικές Λογισμοί I

11η Διάλεξη

(Ο Δοκίμιου)

Μέρος Γ': Βασικές Τεχνικές
Ο Δοκίμιου
(συνέχεια).

Μαθηματικά Μαθηματικά
Ολοκλήρωση

Α) Αντι παραγώγου ολοκλήρωση

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \int x^3 \cdot \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} (\ln x)' \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4}\right) + C \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C\end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \sqrt{1+x} dx$$

$$\textcircled{2} \int x \sqrt{1+x} dx = \int x \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]' dx \quad \frac{\text{Εφαρμογή}}{\text{ω ω ω}}$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \int (x)' \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (1+x)^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} (1+x)^{5/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2}$$

$$\textcircled{3} \int x \sin x dx = \int x \cdot (-\cos x)' dx \quad \left(\text{ή } \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \sin x dx\right)$$

$$= -x \cos x + \int (x)' \sin x dx$$

$$= -x \cos x + \int \sin x dx$$

$$= -x \cos x + \left[-\sin x\right]$$

$$= -x \cos x - \sin x$$

$$= \underline{\underline{-x \cos x - \sin x}}$$

Β) Πολυωνμία (Διαδοχική) παράγοντι Ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x^2 \cdot e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx \\ &= x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \end{aligned}$$

(το $\int x e^x dx$ το έχουμε υπολογίσει
με παράγοντι ολοκλήρωση $x e^x - e^x$)

$$= x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx$$

$$= x^2 e^x - 2 [x e^x - \int (x)' e^x dx]$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = \dots \text{τοίς παραγόμεναις}$$

② Ενεργώντας και με διαδοχικές εφαρμογές
του μέθου του παραγοντις ολοκλήρωσης
υπολογίζονται και το $\int x^k \cdot e^x dx, k=2,3,4,\dots$

Ⓟ Κυκλική απόδοσιν ολοκλήρωσιν.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα I ίσως

$$I = \int e^x \cdot \sin x \, dx$$

$$I = \int (e^x)' \sin x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x (-\cos x) \, dx$$

$$= e^x \sin x + \int (e^x)' \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \, dx$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x [\sin x + \cos x] - I \quad \text{Αρα έχουμε}$$

$$I = e^x [\sin x + \cos x] - I \Rightarrow$$

$$2I = e^x (\sin x + \cos x) \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

Πλοκή ήρωον Ρηζών Συναρτήσεων

$$\int R(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

όπου $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $Q(x) = b_\mu x^\mu + b_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + b_1 x + b_0$

① $v \geq \mu$ Διαφορούμε τα πολυώνυμα και

έχουμε $P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \gamma(x)$

② $v < \mu$ αναλύουμε το $R(x)$

σε αηγά κλάσματα ζώνον

$$\frac{1}{(Ax+B)^k} \quad k=1,2,3,\dots$$

$$\frac{1}{(Cx^2+Dx+E)^\lambda} \quad \lambda=1,2,3,\dots$$

$$\int \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 7x + 6} dx = ; \quad x^3 - 5x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$\Delta \geq 0$
 \Downarrow

$$\alpha (x - \rho_1) (x - \rho_2) \quad \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$P(x) = 7x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 7x + 6,$$

$$\rho_1 \neq \alpha \quad \rho_1 = 5 - \sqrt{2}i \Rightarrow \rho_2 = 5 + \sqrt{2}i$$

$$P(x) = (x - \rho_1)^{k_1} \cdot (x - \rho_2)^{k_2} \cdots (x - \rho_m)^{k_m}$$

$$(x - (z_1 + y_1 i))^{\lambda_1} \cdots (x - (z_r + y_r i))^{\lambda_r}$$