

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - 4η Διάλεξη

Συναρτήσεις, ακολουθίες πραγματικών αριθμών και όρια συναρτήσεων

Οι σημειώσεις αυτές συνοδεύουν την παρουσίαση της 4ης διάλεξης και την επεκτείνουν: κάθε πρόταση που εκεί απλώς διατυπώνεται, εδώ αποδεικνύεται. Το τελευταίο κεφάλαιο περιέχει οκτώ ασκήσεις με πλήρεις λύσεις.

1. Συναρτήσεις

1.1 Ο ορισμός

Μια συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του A ένα και μόνο ένα στοιχείο του B . Γράφουμε:

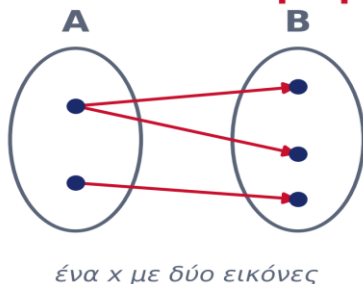
$$f: A \longrightarrow B, \quad x \longmapsto f(x)$$

Το A λέγεται πεδίο ορισμού και το B σύνολο αφίξεως. Ο ορισμός περιέχει δύο απαιτήσεις, και είναι σημαντικό να ξεχωρίζονται: πρώτον, κάθε στοιχείο του A πρέπει να έχει εικόνα — δεν επιτρέπεται να μείνει κάποιο x χωρίς αντίστοιχο $f(x)$. Δεύτερον, η εικόνα αυτή πρέπει να είναι μοναδική — δεν επιτρέπεται ένα x να αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικά στοιχεία του B .

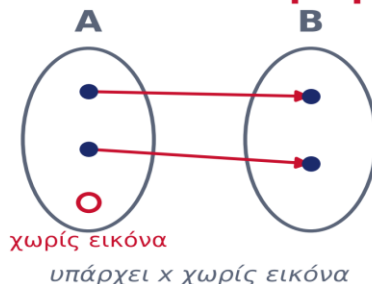
Αντίθετα, ο ορισμός δεν απαιτεί κάθε στοιχείο του B να είναι εικόνα κάποιου x . Το σύνολο των στοιχείων που όντως εμφανίζονται ως εικόνες λέγεται σύνολο τιμών ή εικόνα της f :

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} \subseteq B$$

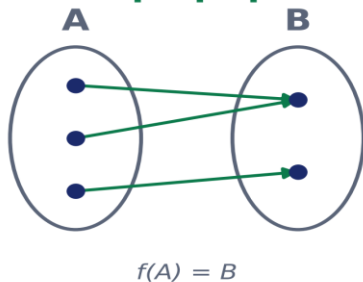
ΔΕΝ είναι συνάρτηση



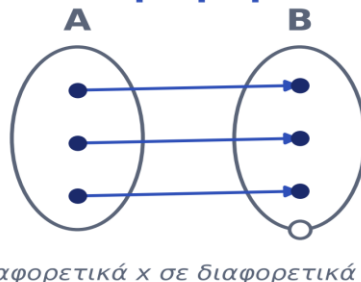
ΔΕΝ είναι συνάρτηση



Συνάρτηση ΕΠΙ



Συνάρτηση 1-1



Σχήμα 1. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις παραβιάζουν τον ορισμό. Οι δύο τελευταίες είναι συναρτήσεις με επιπλέον ιδιότητες.

1.2 Συναρτήσεις 1-1 και επί

Ορισμός 1.1. Η f λέγεται ένα προς ένα (1-1) όταν διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού έχουν διαφορετικές εικόνες.

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Στην πράξη χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα την ισοδύναμη αντιθετοαντιστροφή, η οποία είναι ευκολότερη στους υπολογισμούς:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Ορισμός 1.2. Η f λέγεται επί του B όταν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα τουλάχιστον ενός στοιχείου του A :

$$\text{για κάθε } y \in B \text{ υπάρχει } x \in A \text{ ώστε } f(x) = y, \text{ δηλαδή } f(A) = B$$

Μια συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα 1-1 και επί λέγεται αμφιμονοσήμαντη. Οι δύο ιδιότητες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους: υπάρχουν συναρτήσεις 1-1 που δεν είναι επί, και επί που δεν είναι 1-1.

Το τεστ της οριζόντιας ευθείας

Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της το πολύ σε ένα σημείο. Η $y = x^3$ περνάει το τεστ· η $y = x^2$ όχι, αφού η ευθεία $y = 1$ την τέμνει στα $x = -1$ και $x = 1$.

1.3 Πράξεις συναρτήσεων

Για συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού $A(f)$ και $A(g)$ ορίζουμε κατά σημείο:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

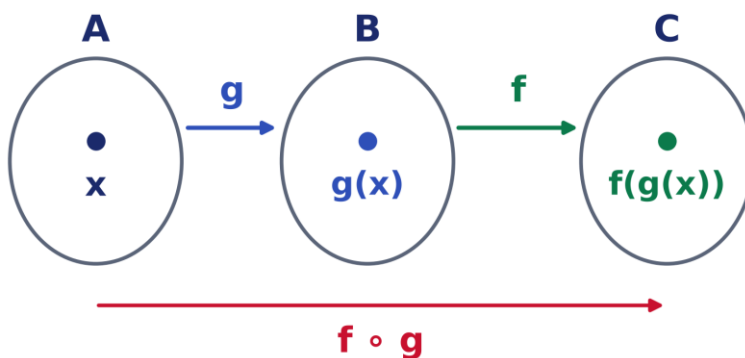
Τα τρία πρώτα ορίζονται στην τομή $A(f) \cap A(g)$. Το πηλίκο ορίζεται στην ίδια τομή, αφού πρώτα αφαιρέσουμε τα σημεία στα οποία $g(x) = 0$.

1.4 Σύνθεση συναρτήσεων

Ορισμός 1.3. Η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται ως:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad A_{f \circ g} = \{ x \in A_g : g(x) \in A_f \}$$

Διαβάζεται από τα δεξιά προς τα αριστερά: πρώτα εφαρμόζεται η g και μετά η f . Η σειρά αυτή είναι ουσιώδης.



Σχήμα 2. Η σύνθεση ως διαδοχική εφαρμογή δύο συναρτήσεων.

Πρόταση 1.4. Η σύνθεση είναι προσεταιριστική: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Απόδειξη. Για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Και τα δύο μέλη δίνουν την ίδια τιμή σε κάθε x , άρα οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται. ■

Η σύνθεση ΔΕΝ είναι αντιμεταθετική

Γενικά $f \circ g \neq g \circ f$. Το απλούστερο αντιπαράδειγμα: $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2$. Τότε $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ ενώ $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Οι δύο συμπίπτουν μόνο για $x = 0$.

1.5 Λυμένο παράδειγμα Α — πράξεις με κλιμακωτές συναρτήσεις

Εκφώνηση. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 2 \\ 3, & x < 2 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο και οι δύο συνθέσεις.

Λύση. Η f αλλάζει τύπο στο 0 και η g στο 2. Τα δύο αυτά σημεία χωρίζουν τον άξονα σε τρία διαστήματα, και σε καθένα από αυτά και οι δύο συναρτήσεις έχουν σταθερό τύπο:

- για $x < 0$: $f(x) = -1$ και $g(x) = 3$; • για $0 \leq x < 2$: $f(x) = 1$ και $g(x) = 3$; • για $x \geq 2$: $f(x) = 1$ και $g(x) = x + 1$.

Εκτελώντας τις πράξεις σε κάθε διάστημα χωριστά παίρνουμε:

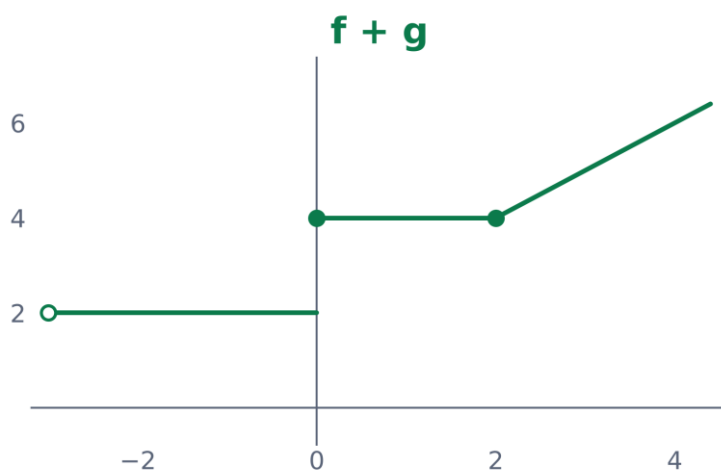
$$(f+g)(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 2 \\ 4, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

$$(f-g)(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 2 \\ -2, & 0 \leq x < 2 \\ -4, & x < 0 \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ 3, & 0 \leq x < 2 \\ -3, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 2 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{3}, & x < 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το πηλίκο ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$: η g παίρνει την τιμή 3 για $x < 2$ και τιμές $x + 1 \geq 3$ για $x \geq 2$, άρα $g(x) \geq 3 > 0$ παντού. Το ίδιο ισχύει και για το g/f , αφού $f(x) = \pm 1 \neq 0$.



τρεις κλάδοι, γιατί τα σημεία αλλαγής των f και g συνδυάζονται

Σχήμα 3. Η γραφική της $f + g$: τρεις κλάδοι, άλμα στο 0, συνέχεια στο 2.

Οι συνθέσεις. Εδώ το παράδειγμα γίνεται ιδιαίτερα διδακτικό. Η g παίρνει μόνο τιμές ≥ 3 , δηλαδή πάντα θετικές· άρα η f εφαρμόζεται πάντοτε σε θετικό όρισμα και δίνει πάντοτε 1. Αντίστροφα, η f παίρνει μόνο τις τιμές 1 και -1 , που είναι και οι δύο μικρότερες του 2· άρα η g χρησιμοποιεί πάντοτε τον κλάδο « $x < 2$ » και δίνει πάντοτε 3. Επομένως:

$$(f \circ g)(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γιατί αξίζει να το θυμάστε

Και οι δύο συνθέσεις είναι σταθερές συναρτήσεις — και όμως διαφορετικές. Είναι ίσως το καθαρότερο δυνατό αντιπαράδειγμα στην αντιμεταθετικότητα της σύνθεσης: δεν χρειάζεται καν να συγκρίνει κανείς τύπους, αρκεί να παρατηρήσει ότι $1 \neq 3$.

1.6 Μονοτονία και φράγματα

Ορισμός 1.5. Η f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

και γνησίως φθίνουσα όταν ισχύει η αντίστροφη ανισότητα:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Πρόταση 1.6. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $x_1 \neq x_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $x_1 < x_2$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f(x_1) < f(x_2)$, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$. Αν είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $f(x_1) > f(x_2)$, άρα πάλι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Σε κάθε περίπτωση η f είναι 1-1. ■

Προσοχή: το αντίστροφο δεν ισχύει. Η συνάρτηση που ορίζεται ως $f(x) = x$ για $x \neq 0, 1$ και $f(0) = 1, f(1) = 0$ είναι 1-1 χωρίς να είναι μονότονη.

Ορισμός 1.7. Η f λέγεται φραγμένη στο A όταν:

$$\text{υπάρχει } M > 0 \text{ ώστε } |f(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in A$$



Σχήμα 4. Γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και φραγμένη συνάρτηση.

1.7 Βασικά είδη συναρτήσεων

Οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Κάθε πολυωνυμική ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Μια ρητή ορίζεται σε όλα τα x με $Q(x) \neq 0$ — και ακριβώς στα σημεία που αποκλείονται θα χρειαστούμε αργότερα την έννοια του ορίου. Στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ανήκουν οι $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi x$ και οι συνδυασμοί τους· οι δύο πρώτες είναι φραγμένες με $|\eta\mu x| \leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$.

1.8 Η αντίστροφη συνάρτηση

Πρόταση 1.8. $Hf: A \rightarrow B$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν είναι 1-1. Τότε ορίζεται μονοσήμαντα η $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ με:

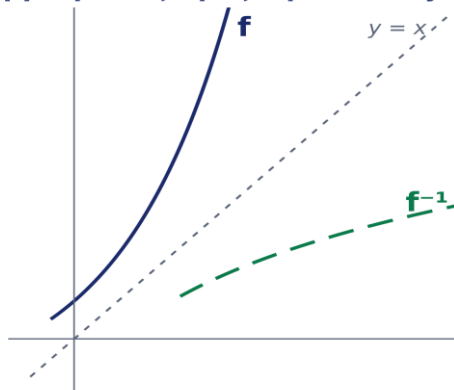
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in A), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in f(A))$$

Απόδειξη. Αν η f είναι 1-1, τότε για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον x με $f(x) = y$ (εξ ορισμού της εικόνας) και το πολύ ένα (από το 1-1). Άρα υπάρχει ακριβώς ένα, και η αντιστοιχία $y \mapsto x$ είναι συνάρτηση. Αντίστροφα, αν η f δεν είναι 1-1, υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2) = y$, οπότε η υποψήφια f^{-1} θα έπρεπε να αντιστοιχίσει στο ίδιο y δύο διαφορετικές τιμές — πράγμα που παραβιάζει τον ορισμό της συνάρτησης. ■

Δύο προειδοποιήσεις για τον συμβολισμό

Το f^{-1} δεν σημαίνει $1/f$: είναι η αντίστροφη ως προς τη σύνθεση, όχι ως προς τον πολλαπλασιασμό. Επίσης, οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, γιατί το σημείο (a, b) ανήκει στη μία ακριβώς όταν το (b, a) ανήκει στην άλλη.

Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$



Σχήμα 5. Η f και η αντίστροφή της είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$.

1.9 Λυμένο παράδειγμα Β — μονοτονία χωρίς τύπο

Εκφώνηση. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) > 1$ για κάθε x , η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) - 3f(x) - x = 0$. Να διερευνηθεί η μονοτονία της f .

Λύση. Δεν διαθέτουμε τύπο για την f , μόνο μια εξίσωση που την περιγράφει. Γράφουμε τη σχέση στη μορφή:

$$x = f^3(x) - 3f(x)$$

Παίρνουμε δύο σημεία $x_1 \neq x_2$ και αφαιρούμε κατά μέλη:

$$x_1 - x_2 = (f^3(x_1) - f^3(x_2)) - 3(f(x_1) - f(x_2))$$

Παραγοντοποιούμε τη διαφορά κύβων με την ταυτότητα $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ και βγάζουμε κοινό παράγοντα:

$$x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2)) [f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3]$$

Πρώτα ελέγχουμε ότι η f είναι 1-1. Αν ήταν $f(x_1) = f(x_2)$, το δεξί μέλος θα μηδενιζόταν, άρα $x_1 = x_2$ — αντίφαση. Επομένως $f(x_1) \neq f(x_2)$ όποτε $x_1 \neq x_2$, και μπορούμε να διαιρέσουμε:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3} > 0$$

Μένει το πρόσημο του παρονομαστή. Εδώ ακριβώς χρησιμοποιείται η υπόθεση $f > 1$: καθένας από τους τρεις όρους $f^2(x_1)$, $f(x_1)f(x_2)$ και $f^2(x_2)$ είναι γνησίως μεγαλύτερος του 1, άρα το άθροισμά τους είναι γνησίως μεγαλύτερο του 3 και ο παρονομαστής θετικός. Επομένως $\lambda > 0$ για κάθε $x_1 \neq x_2$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. ■

Παρατήρηση αυστηρότητας — πού ορίζεται πραγματικά τέτοια f

Η εκφώνηση ζητά f ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$. Αξίζει όμως να ελέγξουμε αν τέτοια συνάρτηση υπάρχει. Θέτοντας $\varphi(u) = u^3 - 3u$, η σχέση γράφεται $x = \varphi(f(x))$, δηλαδή κάθε x πρέπει να είναι τιμή της φ πάνω στο διάστημα $(1, +\infty)$. Όμως $\varphi'(u) = 3(u^2 - 1) > 0$ για $u > 1$ και $\varphi(1) = -2$, άρα το σύνολο τιμών της φ εκεί είναι το $(-2, +\infty)$. Συνεπώς η σχέση μπορεί να ισχύει μόνο για $x > -2$ και όχι σε όλο το $\mathbb{R}$. Η απόδειξη της μονοτονίας παραμένει απολύτως σωστή — αυτό που χρειάζεται διόρθωση είναι η διατύπωση: όπου ορίζεται τέτοια f , εκεί είναι γνησίως αύξουσα.

$$\varphi(u) = u^3 - 3u, \quad \varphi'(u) = 3(u^2 - 1) > 0 \text{ για } u > 1, \quad \varphi(1) = -2$$

2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

2.1 Ορισμός και φράγματα

Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών δεν είναι καινούργιο αντικείμενο: είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών.

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto a(n) \equiv a_n$$

Λέμε ότι η (a_n) συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ όταν:

$$a_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Η ακολουθία λέγεται φραγμένη όταν το σύνολο των τιμών της $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω $a_n \rightarrow \ell$. Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει n_0 ώστε $|a_n - \ell| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $|a_n| < |\ell| + 1$. Οι υπόλοιποι όροι $a_1, \dots, a_{n_0-1}$ είναι πεπερασμένοι στο πλήθος. Θέτοντας $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |\ell| + 1\}$ παίρνουμε $|a_n| \leq M$ για κάθε n . ■

Το αντίστροφο δεν ισχύει: η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη χωρίς να συγκλίνει.

2.2 Υπακολουθίες

Ορισμός 2.2. Η (b_n) λέγεται υπακολουθία της (a_n) όταν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n) ώστε:

$$b_n = a_{k_n} \quad \text{με} \quad k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

Στην πράξη: κρατάμε άπειρους από τους όρους της (a_n) , διατηρώντας όμως τη σειρά τους. Οι άρτιοι όροι $a_2, a_4, a_6, \dots$ και οι περιττοί $a_1, a_3, a_5, \dots$ είναι και οι δύο υπακολουθίες.

Πρόταση 2.3. Αν $a_n \rightarrow \ell$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει επίσης στο ℓ .

Απόδειξη. Επειδή η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι $k_n \geq n$ για κάθε n . Δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 με $|a_m - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $m \geq n_0$. Τότε:

$$k_n \geq n \text{ για κάθε } n \implies k_n \geq n_0 \text{ όποτε } n \geq n_0$$

άρα $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. ■

Πώς χρησιμοποιείται στην πράξη

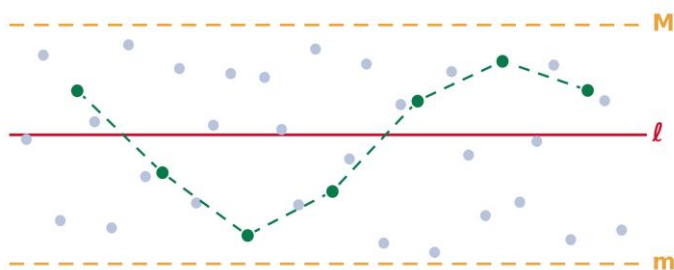
Σχεδόν πάντα ανάποδα: αν βρούμε δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει. Για την $(-1)^n$ οι άρτιοι όροι δίνουν 1 και οι περιττοί -1 , άρα η ακολουθία αποκλίνει.

2.3 Το θεώρημα Bolzano–Weierstrass

Θεώρημα 2.4 (Bolzano–Weierstrass). Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Έστω $a_n \in [m, M]$ για κάθε n . Διχοτομούμε το $[m, M]$. Τουλάχιστον ένα από τα δύο μισά περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας· το ονομάζουμε I_1 και επιλέγουμε έναν όρο $a_{k_1} \in I_1$. Διχοτομούμε το I_1 και επαναλαμβάνουμε: παίρνουμε $I_2 \subset I_1$ με άπειρους όρους και επιλέγουμε $a_{k_2} \in I_2$ με $k_2 > k_1$. Συνεχίζοντας, κατασκευάζουμε εγκλιωτισμένα διαστήματα $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ με μήκη $(M - m)/2^j \rightarrow 0$ και μια υπακολουθία (a_{k_j}) με $a_{k_j} \in I_j$. Από την αρχή των εγκλιωτισμένων διαστημάτων — που είναι ισοδύναμη με το αξίωμα πληρότητας — η τομή όλων των I_j είναι ένα μόνο σημείο ℓ , και επειδή $|a_{k_j} - \ell| \leq \text{μήκος}(I_j) \rightarrow 0$, έπεται $a_{k_j} \rightarrow \ell$. ■

Bolzano–Weierstrass



η ίδια η ακολουθία μπορεί να μη συγκλίνει — μια υπακολουθία της όμως συγκλίνει πάντα
Σχήμα 6. Η ακολουθία μπορεί να μη συγκλίνει· μια υπακολουθία της όμως συγκλίνει πάντα.

2.4 Μονότονη και φραγμένη

Θεώρημα 2.5. Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη (η φθίνουσα περίπτωση είναι συμμετρική). Το σύνολο $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, άρα από το αξίωμα πληρότητας έχει supremum:

$$\ell = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, το $\ell - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα, άρα υπάρχει δείκτης n_0 με $a_{n_0} > \ell - \varepsilon$. Επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα και το ℓ είναι άνω φράγμα:

$$\ell - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

δηλαδή $|a_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $a_n \rightarrow \ell$.

Γιατί είναι τόσο χρήσιμο

Αποδεικνύει τη σύγκλιση χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο εκ των προτέρων. Αυτή είναι η τυπική στρατηγική για αναδρομικές ακολουθίες: (1) δείχνουμε με επαγωγή ότι η ακολουθία είναι φραγμένη, (2) δείχνουμε ότι είναι μονότονη, (3) συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει, (4) περνάμε στο όριο μέσα στον αναδρομικό τύπο και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

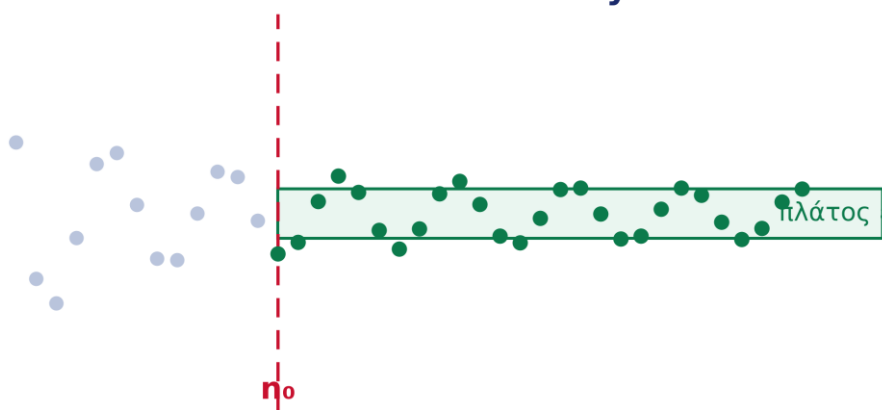
2.5 Ακολουθίες Cauchy και η πληρότητα του $\mathbb{R}$

Ορισμός 2.6. Η (a_n) λέγεται ακολουθία Cauchy όταν:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Η ουσία του ορισμού είναι ότι οι όροι πλησιάζουν μεταξύ τους — όχι κάποιο όριο που πρέπει να το γνωρίζουμε από πριν. Γι' αυτό το κριτήριο λέγεται εσωτερικό: ελέγχεται αποκλειστικά από την ίδια την ακολουθία.

Ακολουθία Cauchy



μετά τον δείκτη n_0 όλοι οι όροι απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ε

Σχήμα 7. Μετά τον δείκτη n_0 όλοι οι όροι βρίσκονται σε μια λωρίδα πλάτους ε .

Θεώρημα 2.7 (πληρότητα του $\mathbb{R}$). Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. ($\implies$) Έστω $a_n \rightarrow \ell$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 με $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για $n, m \geq n_0$, από την τριγωνική ανισότητα:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Έστω (a_n) Cauchy. Πρώτα δείχνουμε ότι είναι φραγμένη: για $\varepsilon = 1$ υπάρχει n_0 με $|a_n - a_{\{n_0\}}| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $|a_n| < |a_{\{n_0\}}| + 1$, και οι υπόλοιποι όροι είναι πεπερασμένοι στο πλήθος. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $a_{\{k_m\}} \rightarrow \ell$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε n_0 ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ για $n, m \geq n_0$, και m αρκετά μεγάλο ώστε $k_m \geq n_0$ και $|a_{\{k_m\}} - \ell| < \varepsilon/2$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$:

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{k_m}| + |a_{k_m} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

άρα $a_n \rightarrow \ell$. ■

Γιατί το θεώρημα λέγεται «πληρότητα»

Στο $\mathbb{Q}$ το θεώρημα δεν ισχύει. Η ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ — δηλαδή 1, 1,4, 1,41, 1,414, ... — είναι Cauchy μέσα στο $\mathbb{Q}$, αλλά δεν έχει ρητό όριο. Το $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς το σύνολο στο οποίο συμπληρώνονται τέτοια κενά: αυτό ακριβώς σημαίνει η λέξη «πλήρες» στον χαρακτηρισμό του $\mathbb{R}$ ως πλήρους διατεταγμένου σώματος.

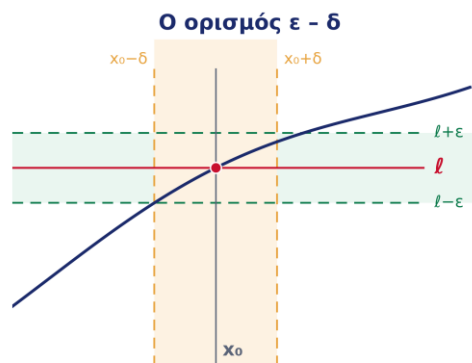
3. Όρια συναρτήσεων

3.1 Ο ορισμός $\varepsilon - \delta$

Ορισμός 3.1. Λέμε ότι $\lim f(x) = \ell$ καθώς $x \rightarrow x_0$, με $x_0, \ell \in \mathbb{R}$, όταν:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Δύο σημεία αξίζουν ιδιαίτερης προσοχής. Πρώτον, η σειρά των ποσοδεικτών: πρώτα δίνεται το ε και κατόπιν βρίσκεται το δ , γι' αυτό και γράφουμε $\delta = \delta(\varepsilon)$. Αν αντιστραφεί η σειρά, ο ορισμός αλλάζει εντελώς νόημα. Δεύτερον, η συνθήκη $0 < |x - x_0|$ εξαιρεί ρητά το ίδιο το x_0 : το όριο περιγράφει τη συμπεριφορά της f κοντά στο x_0 , ανεξάρτητα από το αν η f ορίζεται στο x_0 και από την τιμή που ενδεχομένως παίρνει εκεί.



Δοθέντος του ε (πράσινη ζώνη) βρίσκουμε δ (κίτρινη λωρίδα) ώστε η γραφική να μη βγαίνει από τη ζώνη

Σχήμα 8. Δοθείσας της πράσινης ζώνης πλάτους 2ε , βρίσκουμε κίτρινη λωρίδα πλάτους 2δ .

Πρόταση 3.2. Αν το όριο υπάρχει, είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω ότι $f(x) \rightarrow \ell_1$ και $f(x) \rightarrow \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$. Θέτουμε $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| / 2 > 0$. Υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ με $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ για $0 < |x - x_0| < \delta_1$ και $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$ για $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Παίρνοντας ένα x με $0 < |x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} + \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} = |\ell_1 - \ell_2|$$

που είναι άτοπο. Άρα $\ell_1 = \ell_2$. ■

3.2 Άπειρα όρια και όρια στο άπειρο

Ο ίδιος ορισμός προσαρμόζεται όταν το x_0 ή το όριο είναι $\pm\infty$: αλλάζουν μόνο οι περιοχές. Ενδεικτικά:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall K > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ένα λάθος που γίνεται συχνά

Η γραφή « $\lim f(x) = +\infty$ » δεν σημαίνει ότι το όριο υπάρχει. Σημαίνει ότι δεν υπάρχει πραγματικό όριο, και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο δεν υπάρχει. Στο $\mathbb{R}$ η σύγκλιση απαιτεί πεπερασμένο όριο.

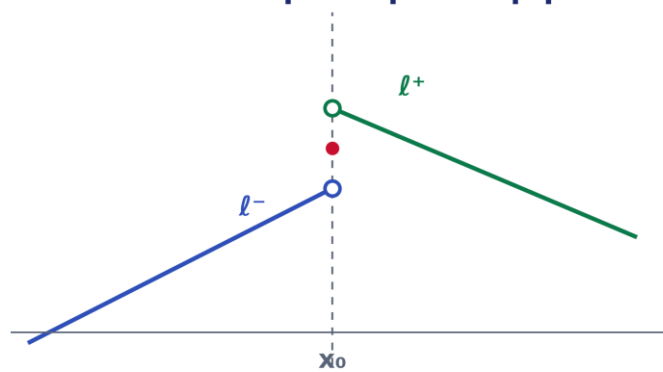
3.3 Πλευρικά όρια

Πρόταση 3.3. Το όριο στο x_0 υπάρχει και ισούται με ℓ αν και μόνο αν υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια και είναι ίσα με ℓ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν ισχύει ο ορισμός 3.1 με κάποιο δ , τότε περιοριζόμενοι στα $x < x_0$ παίρνουμε το αριστερό όριο και στα $x > x_0$ το δεξί, με το ίδιο δ . ($\Leftarrow$) Αντίστροφα, αν για το δοθέν ε υπάρχουν δ_1 για το αριστερό και δ_2 για το δεξί όριο, τότε το $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ικανοποιεί τον ορισμό 3.1, αφού κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$ βρίσκεται είτε αριστερά είτε δεξιά του x_0 . ■

Όταν τα πλευρικά όρια διαφέρουν



$l^- \neq l^+ \Rightarrow$ το όριο στο x_0 ΔΕΝ υπάρχει, όποια κι αν είναι η τιμή $f(x_0)$

Σχήμα 9. Όταν τα δύο πλευρικά όρια διαφέρουν, το όριο δεν υπάρχει.

3.4 Η αρχή της μεταφοράς

Θεώρημα 3.4 (αρχή της μεταφοράς). Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \text{για κάθε } (x_n) \text{ με } x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \text{ ισχύει } f(x_n) \rightarrow \ell$$

Το θεώρημα ισχύει γενικά για $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $f(x) \rightarrow \ell$ και (x_n) ακολουθία με $x_n \rightarrow x_0$ και $x_n \neq x_0$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ παίρνουμε το δ του ορισμού 3.1. Επειδή $x_n \rightarrow x_0$, υπάρχει n_1 ώστε $|x_n - x_0| < \delta$ για κάθε $n \geq n_1$, και επειδή $x_n \neq x_0$ ισχύει επιπλέον $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Άρα:

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \text{ για } n \geq n_1 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_1$, δηλαδή $f(x_n) \rightarrow \ell$.

($\Leftarrow$) Αποδεικνύουμε την αντιθετοαντιστροφή. Έστω ότι ΔΕΝ ισχύει $f(x) \rightarrow \ell$. Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει x με $0 < |x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Εφαρμόζοντας αυτό διαδοχικά για $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots$ κατασκευάζουμε ακολουθία (x_n) με:

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{αλλά} \quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$$

Η ακολουθία αυτή ικανοποιεί $x_n \rightarrow x_0$ και $x_n \neq x_0$, αλλά η $f(x_n)$ δεν τείνει στο ℓ . Άρα αποτυγχάνει και το δεξί μέλος της ισοδυναμίας. ■

Η πρακτική αξία του θεωρήματος

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) χρησιμοποιείται κυρίως ανάποδα: για να δείξουμε ότι ένα όριο ΔΕΝ υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες που τείνουν στο x_0 και δίνουν διαφορετικά όρια εικόνων. Αυτό είναι ασύγκριτα ευκολότερο από το να δουλέψει κανείς απευθείας με ε και δ .

3.5 Εφαρμογή — το $\eta\mu(1/x)$ κοντά στο μηδέν

Ισχυρισμός. Το όριο της $f(x) = \eta\mu(1/x)$ καθώς $x \rightarrow 0$ δεν υπάρχει.

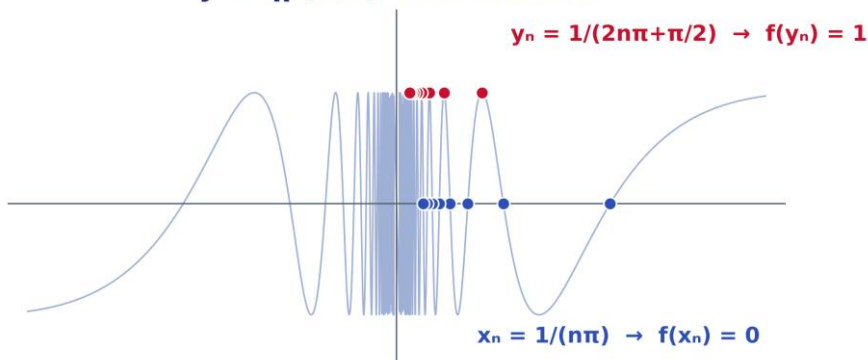
Απόδειξη. Θεωρούμε δύο ακολουθίες που τείνουν στο 0:

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0, \quad \eta\mu\left(\frac{1}{x_n}\right) = \eta\mu(n\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \rightarrow 0, \quad \eta\mu\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1 \rightarrow 1$$

Και οι δύο ακολουθίες τείνουν στο 0 με όρους διαφορετικούς από το 0, αλλά οι εικόνες τους τείνουν σε 0 και σε 1 αντίστοιχα. Από την αρχή της μεταφοράς, το όριο δεν υπάρχει. ■

$y = \eta\mu(1/x)$ κοντά στο 0



δύο ακολουθίες που τείνουν στο 0 δίνουν διαφορετικά όρια $\Rightarrow$ το όριο δεν υπάρχει

Σχήμα 10. Η $y = \eta\mu(1/x)$ ταλαντώνεται ολοένα ταχύτερα καθώς $x \rightarrow 0$.

Σημειώστε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη, άρα το όριο δεν είναι ούτε $+\infty$ ούτε $-\infty$: απλώς δεν υπάρχει.

4. Αναδρομικοί τύποι

Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί βήμα-βήμα: δίνονται ένας ή περισσότεροι αρχικοί όροι και ένας κανόνας που παράγει τον επόμενο όρο από τους προηγούμενους. Τυπικά παραδείγματα είναι τα $a_{(n+1)} = 2a_n + 1$ με $a_0 = 1$ (πρώτης τάξης), $a_{(n+2)} = a_{(n+1)} + a_n$ με $a_0 = a_1 = 1$ (δεύτερης τάξης, η ακολουθία Fibonacci) και $a_{(n+1)} = \sqrt{3 + a_n}$ με $a_0 = 1$ (μη γραμμική).

4.1 Λυμένο παράδειγμα — από τον αναδρομικό στον αναλυτικό τύπο

Εκφώνηση. Δίνεται ο αναδρομικός τύπος:

$$a_{n+1} = a_n + 7, \quad a_3 = 1$$

Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της ακολουθίας.

Βήμα 1 — εικασία. Γράφουμε μερικούς πρώτους όρους:

$$a_3 = 1, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 15, \quad a_6 = 22, \quad a_7 = 29, \quad \dots$$

Κάθε όρος είναι 7 περισσότερο από τον προηγούμενο και η αρίθμηση ξεκινά από τον δείκτη 3. Για να φτάσουμε στον a_n χρειάζονται $n - 3$ βήματα των 7, με αφετηρία το 1. Εικάζουμε επομένως:

$$a_n = (n - 3) \cdot 7 + 1 = 7n - 20, \quad n \geq 3$$

Βήμα 2 — απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Η παρατήρηση ενός μοτίβου δεν αποτελεί απόδειξη: το ότι ο τύπος ισχύει για τέσσερις όρους δεν εγγυάται τίποτε για τους υπόλοιπους.

- Βάση: για $n = 3$ ο τύπος δίνει $a_3 = (3 - 3) \cdot 7 + 1 = 1$, που συμφωνεί με το δεδομένο.
- Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι ο τύπος ισχύει για κάποιο $n = k \geq 3$, δηλαδή $a_k = (k - 3) \cdot 7 + 1$.
- Επαγωγικό βήμα: χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο και την επαγωγική υπόθεση:

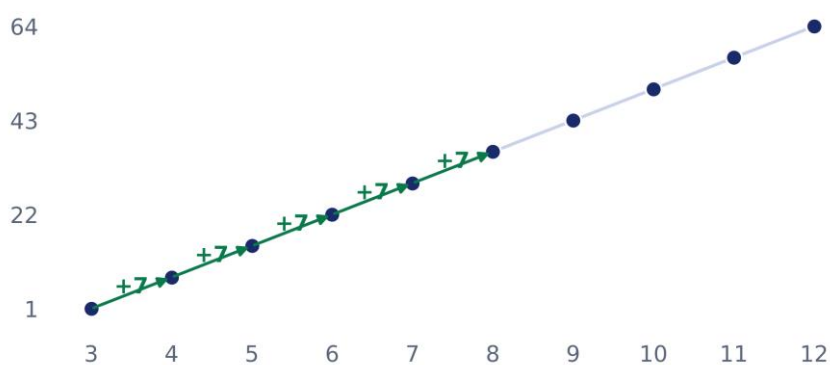
$$a_{k+1} = a_k + 7 = [(k - 3) \cdot 7 + 1] + 7 = [(k + 1) - 3] \cdot 7 + 1$$

που είναι ακριβώς ο τύπος για $n = k + 1$. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής ο τύπος ισχύει για κάθε $n \geq 3$. ■

Γενίκευση

Κάθε αναδρομή της μορφής $a_{(n+1)} = a_n + d$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά d , και ο γενικός της τύπος είναι πάντοτε $a_n = a_{\{n_0\}} + (n - n_0) \cdot d$. Η συγκεκριμένη άσκηση είναι η περίπτωση $n_0 = 3$, $a_3 = 1$, $d = 7$.

$$a_n = (n - 3) \cdot 7 + 1 = 7n - 20$$



αριθμητική πρόοδος με διαφορά 7 και αρχικό όρο $a_3 = 1$

Σχήμα 11. Η $a_n = 7n - 20$ ως αριθμητική πρόοδος με διαφορά 7.

4.2 Όταν δεν υπάρχει κλειστός τύπος

Για πολλές αναδρομές δεν υπάρχει απλή κλειστή μορφή. Εκεί χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.5. Ως παράδειγμα:

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}, \quad a_0 = 1$$

Βήμα 1 — φράγμα. Θέτουμε $\ell = (1 + \sqrt{13})/2$, τη θετική ρίζα της $\ell^2 = 3 + \ell$. Με επαγωγή: $a_0 = 1 < \ell$, και αν $a_n < \ell$ τότε $a_{(n+1)} = \sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3 + \ell} = \ell$. Άρα $a_n < \ell$ για κάθε n .

Βήμα 2 — μονοτονία. Για θετικούς όρους:

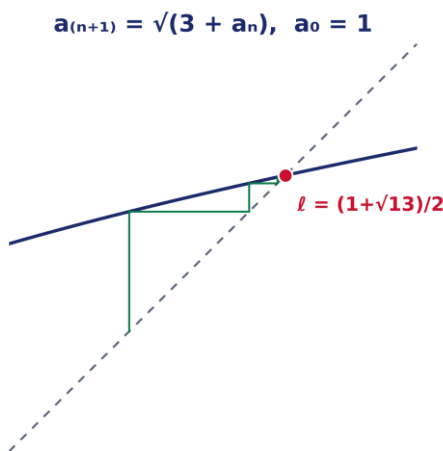
$$a_{n+1} - a_n > 0 \iff 3 + a_n > a_n^2 \iff a_n^2 - a_n - 3 < 0 \iff a_n < \ell$$

που ισχύει από το Βήμα 1. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Βήμα 3 — σύγκλιση και όριο. Μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιο ℓ' . Περνώντας στο όριο μέσα στον αναδρομικό τύπο, $\ell' = \sqrt{3 + \ell'}$, δηλαδή:

$$\ell^2 - \ell - 3 = 0 \implies \ell = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2,30278$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται, αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί. ■



αύξουσα και άνω φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει· το όριο λύνει την $\ell^2 = 3 + \ell$

Σχήμα 12. Η αναδρομή συγκλίνει μονότονα στο σημείο τομής της $y = \sqrt{3+x}$ με την $y = x$.

5. Ασκήσεις με λύσεις

Προτείνεται να επιχειρήσετε κάθε άσκηση πριν διαβάσετε τη λύση. Οι λύσεις είναι ενδεικτικές: σε αρκετές ασκήσεις υπάρχουν εναλλακτικοί δρόμοι εξίσου σωστοί.

Άσκηση 1

Εκφώνηση. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 + 1$ να βρεθούν οι $f \circ g$ και $g \circ f$. Είναι ίσες;

$$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = x^2 + 1$$

Λύση. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύνθεσης. Για την $f \circ g$ αντικαθιστούμε το x της f με την $g(x)$:

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1, \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 10$$

Οι δύο συνθέσεις δεν ταυτίζονται ως συναρτήσεις. Μπορούμε μάλιστα να βρούμε ακριβώς πού συμπίπτουν:

$$2x^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 10 \iff 2x^2 - 12x + 11 = 0 \iff x = 3 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Άρα οι γραφικές τους τέμνονται σε δύο μόνο σημεία — πουθενά αλλού οι τιμές δεν συμφωνούν. Αυτό επιβεβαιώνει με τον πιο συγκεκριμένο τρόπο ότι γενικά $f \circ g \neq g \circ f$. ■

Άσκηση 2

Εκφώνηση. Ναδειχθεί ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, \quad x \neq 3$$

Λύση. Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x :

$$y(x-3) = 2x+1 \implies x(y-2) = 3y+1 \implies x = \frac{3y+1}{y-2}$$

Το κρίσιμο σημείο: για κάθε $y \neq 2$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x . Η μοναδικότητα της λύσης είναι ακριβώς η συνθήκη 1-1 (αν υπήρχαν δύο διαφορετικά x με την ίδια εικόνα, η εξίσωση θα είχε δύο λύσεις). Ταυτόχρονα ο τύπος που βρήκαμε είναι η αντίστροφή:

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}, \quad y \neq 2$$

Επαλήθευση: $f(f^{-1}(y)) = (2(3y+1)/(y-2) + 1) / ((3y+1)/(y-2) - 3) = (7y)/7 = y$, όπως απαιτείται. ■

Άσκηση 3

Εκφώνηση. Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της ακολουθίας και να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή.

$$a_{n+1} = 3a_n - 2, \quad a_1 = 2$$

Λύση. Υπολογίζουμε τους πρώτους όρους: $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 10, a_4 = 28, a_5 = 82$. Αφαιρώντας μία μονάδα από καθέναν παίρνουμε 1, 3, 9, 27, 81 — δυνάμεις του 3. Εικάζουμε λοιπόν:

$$a_n = 3^{n-1} + 1$$

Βάση: $a_1 = 3^0 + 1 = 2$, που συμφωνεί με το δεδομένο. Επαγωγικό βήμα: έστω $a_k = 3^{k-1} + 1$. Τότε:

$$a_{k+1} = 3a_k - 2 = 3(3^{k-1} + 1) - 2 = 3^k + 1$$

που είναι ο τύπος για $n = k + 1$. Άρα ισχύει για κάθε $n \geq 1$. ■

Άσκηση 4

Εκφώνηση. Ναδειχθεί ότι $0 < a_n < 2$ και ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Ποιο είναι το όριό της;

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Λύση. Φράγμα με επαγωγή: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Αν $a_n < 2$, τότε $a_{(n+1)} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2$. Η θετικότητα είναι προφανής από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας. Άρα $0 < a_n < 2$ για κάθε n .

Μονοτονία: για θετικούς όρους η ανισότητα $a_{(n+1)} > a_n$ είναι ισοδύναμη με:

$$a_{n+1} > a_n \iff 2 + a_n > a_n^2 \iff (a_n - 2)(a_n + 1) < 0$$

Το γινόμενο $(a_n - 2)(a_n + 1)$ είναι αρνητικό ακριβώς όταν $-1 < a_n < 2$, που ισχύει. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιο ℓ . Περνώντας στο όριο:

$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \implies \ell^2 - \ell - 2 = 0 \implies \ell = 2$$

Η ρίζα -1 απορρίπτεται, αφού $a_n > 0$ για κάθε n . Επομένως $a_n \rightarrow 2$. ■

Άσκηση 5

Εκφώνηση. Υπάρχει το όριο της παρακάτω συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 1$;

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση. Το $x_0 = 1$ είναι σημείο αλλαγής τύπου, άρα εξετάζουμε χωριστά τα δύο πλευρικά όρια. Από αριστερά χρησιμοποιείται ο κλάδος $x + 1$ και το όριο είναι $1 + 1 = 2$. Από δεξιά χρησιμοποιείται ο κλάδος $3 - x$ και το όριο είναι $3 - 1 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα, άρα από την Πρόταση 3.3 το όριο υπάρχει και ισούται με 2. Παρατηρήστε επιπλέον ότι $f(1) = 3 - 1 = 2$, άρα η συνάρτηση είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. ■

Άσκηση 6

Εκφώνηση. Υπάρχει το παρακάτω όριο; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Λύση. Εφαρμόζουμε την αρχή της μεταφοράς. Αναζητούμε δύο ακολουθίες που τείνουν στο 0 και δίνουν διαφορετικά όρια εικόνων:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} : \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1, \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} : \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = -1$$

Πράγματι, για $x_n = 1/(2n\pi)$ είναι $1/x_n = 2n\pi$ και $\sin(2n\pi) = 1$ για κάθε n , ενώ για $y_n = 1/((2n+1)\pi)$ είναι $\sin((2n+1)\pi) = -1$ για κάθε n . Και οι δύο ακολουθίες τείνουν στο 0 με όρους διαφορετικούς από το 0, αλλά οι εικόνες τους συγκλίνουν σε 1 και σε -1 αντίστοιχα.

Από το Θεώρημα 3.4 το όριο δεν υπάρχει. Σημειώστε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη, άρα το όριο δεν είναι ούτε $\pm\infty$. ■

Άσκηση 7

Εκφώνηση. Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη και γνησίως αύξουσα, και να βρεθούν τα όριά της στο $\pm\infty$.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Λύση. Φράγμα: ο παρονομαστής $1 + |x|$ είναι γνησίως μεγαλύτερος από τον αριθμητή $|x|$, άρα:

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

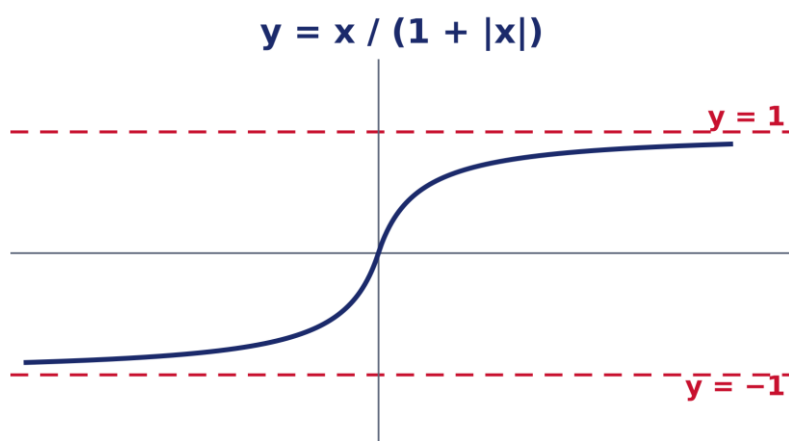
δηλαδή $-1 < f(x) < 1$ για κάθε x . Η f είναι επομένως φραγμένη με $M = 1$, και μάλιστα δεν παίρνει ποτέ τις τιμές ± 1 .

Μονοτονία: εξετάζουμε χωριστά τους δύο κλάδους που προκύπτουν από την απόλυτη τιμή:

$$x \geq 0 : f(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \quad x < 0 : f(x) = -1 + \frac{1}{1-x}$$

Για $x \geq 0$ η $1/(1+x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η f γνησίως αύξουσα. Για $x < 0$ η $1/(1-x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και πάλι η f γνησίως αύξουσα. Οι δύο κλάδοι ενώνονται ομαλά στο 0 με κοινή τιμή 0, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ — και συνεπώς $1-1$, από την Πρόταση 1.6.

Όρια στο άπειρο: διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $|x|$ παίρνουμε $f(x) = \operatorname{sgn}(x) / (1/|x| + 1) \rightarrow \pm 1$ καθώς $x \rightarrow \pm\infty$. Οι ευθείες $y = \pm 1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες που δεν τέμνονται ποτέ. ■



φραγμένη, γνησίως αύξουσα, με οριζόντιες ασύμπτωτες $y = \pm 1$

Σχήμα 13. Η $y = x/(1+|x|)$: φραγμένη, γνησίως αύξουσα, με ασύμπτωτες $y = \pm 1$.

Άσκηση 8

Εκφώνηση. Συγκλίνει η παρακάτω ακολουθία; Είναι φραγμένη;

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

Λύση. Φράγμα: $|a_n| = n/(n+1) < 1$ για κάθε n , άρα η ακολουθία είναι φραγμένη.

Σύγκλιση: εξετάζουμε τις δύο φυσικές υπακολουθίες, των άρτιων και των περιττών δεικτών:

$$a_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \rightarrow 1, \quad a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow -1$$

Βρήκαμε δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια. Αν η (a_n) συνέκλινε, τότε από την Πρόταση 2.3 κάθε υπακολουθία της θα είχε το ίδιο όριο. Άρα η ακολουθία δεν συγκλίνει.

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι απολύτως συμβατό με το θεώρημα Bolzano–Weierstrass: η ακολουθία είναι φραγμένη και πράγματι έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες — δύο μάλιστα. Το θεώρημα δεν υπόσχεται τη σύγκλιση ολόκληρης της ακολουθίας. ■

6. Σύνοψη των κύριων αποτελεσμάτων

Πρόταση 1.6	Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1 (το αντίστροφο δεν ισχύει).
Πρόταση 1.8	Η f αντιστρέφεται αν και μόνο αν είναι 1-1.
Πρόταση 2.1	Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη (το αντίστροφο δεν ισχύει).
Πρόταση 2.3	Αν $a_n \rightarrow \ell$, κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο ℓ .
Θεώρημα 2.4	Bolzano–Weierstrass: κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Θεώρημα 2.5	Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
Θεώρημα 2.7	Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy (πληρότητα του $\mathbb{R}$).
Πρόταση 3.2	Το όριο, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.
Πρόταση 3.3	Το όριο υπάρχει αν και μόνο αν τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.
Θεώρημα 3.4	Αρχή της μεταφοράς: τα όρια συναρτήσεων ανάγονται σε όρια ακολουθιών.

