

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

4η Διάλεξη

Συναρτήσεις. Ακολουθίες και όρια



Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών · Τμήμα Στατιστικής

Τι θα δούμε σήμερα

1

Συναρτήσεις

Ορισμός, 1–1 και επί, πράξεις, σύνθεση, μονοτονία, αντίστροφη

2

Ακολουθίες

Υπακολουθίες, Bolzano–Weierstrass, μονοτονία, ακολουθίες Cauchy

3

Όρια συναρτήσεων

Ο ορισμός ε – δ , πλευρικά και άπειρα όρια, η αρχή της μεταφοράς

4

Αναδρομικοί τύποι

Από τον αναδρομικό στον αναλυτικό τύπο, με μαθηματική επαγωγή

Το νήμα της διάλεξης

Τρεις έννοιες που φαίνονται ξεχωριστές — και ένα θεώρημα που τις δένει μεταξύ τους.

Συνάρτηση

Κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου τιμών.

Ακολουθία

Συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$. Δηλαδή ειδική περίπτωση — όχι καινούργιο αντικείμενο.

Όριο

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο — όχι η τιμή της στο σημείο αυτό.

Αρχή της μεταφοράς: τα όρια συναρτήσεων ανάγονται σε όρια ακολουθιών

Γιατί μας ενδιαφέρει

Επειδή για να δείξουμε ότι ένα όριο ΔΕΝ υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες που δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα — πολύ ευκολότερο από το να δουλέψουμε απευθείας με ε και δ .

1

Συναρτήσεις

Ο ορισμός και τα δύο βασικά είδη: 1–1 και επί

Ο ορισμός

$$f: A \longrightarrow B, \quad x \longmapsto f(x)$$

Κάθε x έχει εικόνα

Δεν επιτρέπεται στοιχείο του A χωρίς αντίστοιχο στοιχείο του B .

Μία μόνο εικόνα

Σε κάθε x αντιστοιχεί ακριβώς ένα $f(x)$ — ποτέ δύο.

Το B μπορεί να περισσεύει

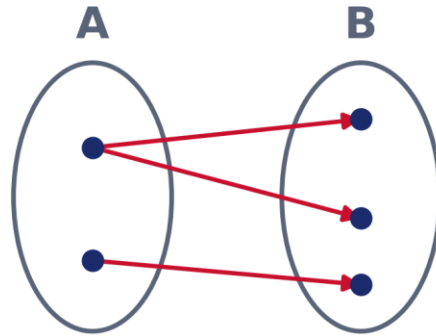
Δεν απαιτείται κάθε y του B να είναι εικόνα κάποιου x .

Ορολογία

Το A λέγεται πεδίο ορισμού και το B σύνολο αφίξεως. Το σύνολο $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ λέγεται σύνολο τιμών ή εικόνα της f , και είναι πάντα υποσύνολο του B — όχι κατ' ανάγκη ίσο με αυτό.

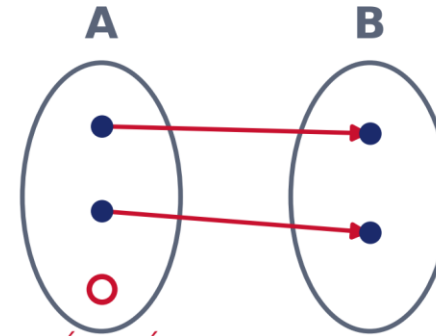
Τέσσερις περιπτώσεις

ΔΕΝ είναι συνάρτηση



ένα x με δύο εικόνες

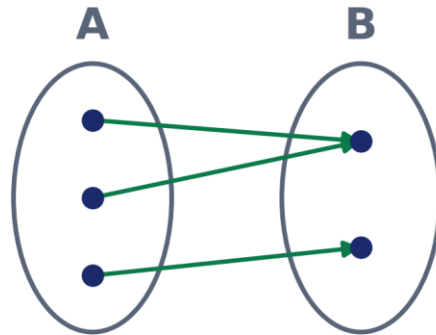
ΔΕΝ είναι συνάρτηση



χωρίς εικόνα

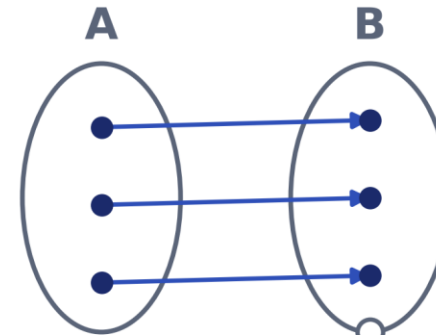
υπάρχει x χωρίς εικόνα

Συνάρτηση ΕΠΙ



$f(A) = B$

Συνάρτηση 1-1



διαφορετικά x σε διαφορετικά $f(x)$

Συνάρτηση 1-1 και συνάρτηση επί

Συνάρτηση 1-1 (ένα προς ένα)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

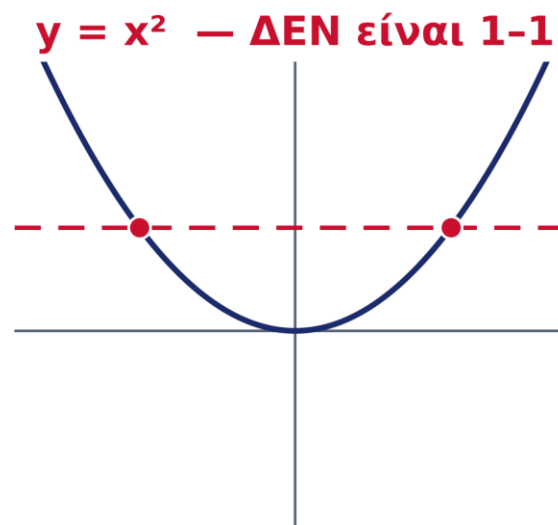
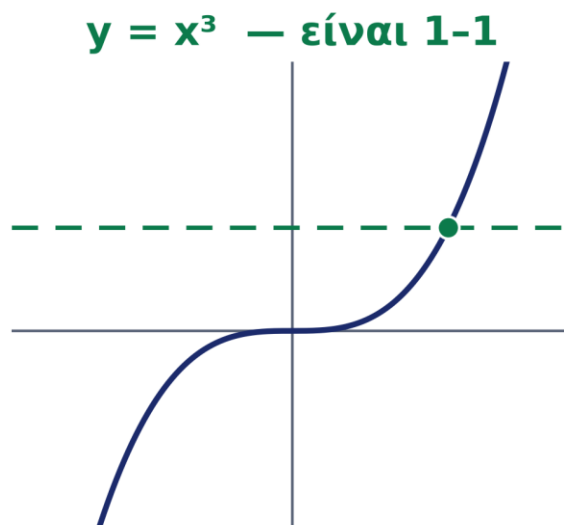
Συνάρτηση επί (επί του B)

$$f(A) = B : \text{για κάθε } y \in B \text{ υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) = y$$

Και τα δύο μαζί: αμφιμονοσήμαντη (bijection)

Μια συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα 1-1 και επί αντιστρέφεται — εκεί ακριβώς ορίζεται η f^{-1} .

Το τεστ της οριζόντιας ευθείας



κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική το πολύ μία φορά $\Leftrightarrow$ η f είναι 1-1

Χρήσιμο κριτήριο

Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της το πολύ σε ένα σημείο.

Ένα ασφαλές εργαλείο

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1. Το αντίστροφο δεν ισχύει: υπάρχουν 1-1 συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες.

2

Πράξεις και σύνθεση

Τέσσερις πράξεις κατά σημείο — και μία που είναι διαφορετική

Οι τέσσερις πράξεις κατά σημείο

Ορίζονται με τον προφανή τρόπο, σε όσα x ανήκουν και στα δύο πεδία ορισμού.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{με } g(x) \neq 0$$

Το πεδίο ορισμού

Για τα $f \pm g$ και $f \cdot g$ είναι η τομή $A(f) \cap A(g)$. Για το πηλίκο αφαιρούμε επιπλέον τα σημεία όπου $g(x) = 0$.

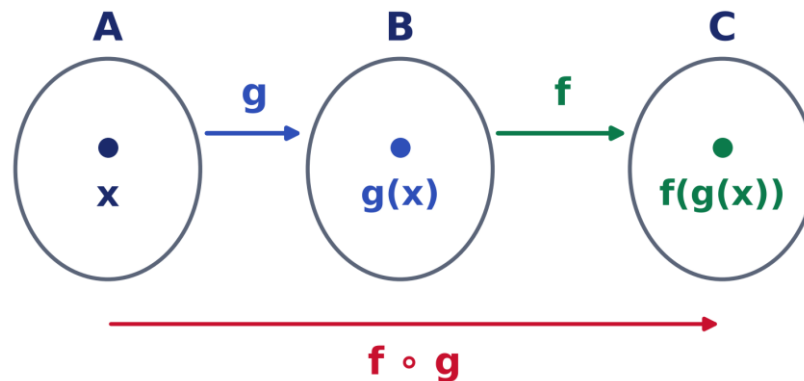
Γιατί «κατά σημείο»

Σε κάθε x εκτελούμε την πράξη ανάμεσα σε δύο αριθμούς — όχι ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις ως αντικείμενα.

Οι πράξεις αυτές κληρονομούν τις ιδιότητες των πράξεων στο $\mathbb{R}$

Η σύνθεση συναρτήσεων

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



Προσοχή στο πεδίο ορισμού

Για να οριστεί το $(f \circ g)(x)$ χρειάζεται πρώτα να ορίζεται το $g(x)$ και μετά το $g(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Η σύνθεση δεν είναι αντιμεταθετική

Είναι όμως προσεταιριστική — η διάκριση αυτή είναι ακριβώς ίδια με αυτήν στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \text{πάντα}$$

$$f \circ g \neq g \circ f \quad \text{γενικά}$$

Τι σημαίνει προσεταιριστική

Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία θα εκτελέσουμε τις δύο συνθέσεις — άρα το σύμβολο $f \circ g \circ h$ είναι μονοσήμαντο και δεν χρειάζεται παρενθέσεις.

Το κλασικό αντιπαράδειγμα

$f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2$. Τότε $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ ενώ $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Ισότητα μπορεί να ισχύει για κάποια x — ποτέ όμως δεν είναι αυτονόητη για όλα.

Λυμένη άσκηση — η εκφώνηση

Να υπολογιστούν το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο και οι δύο συνθέσεις των f και g .

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

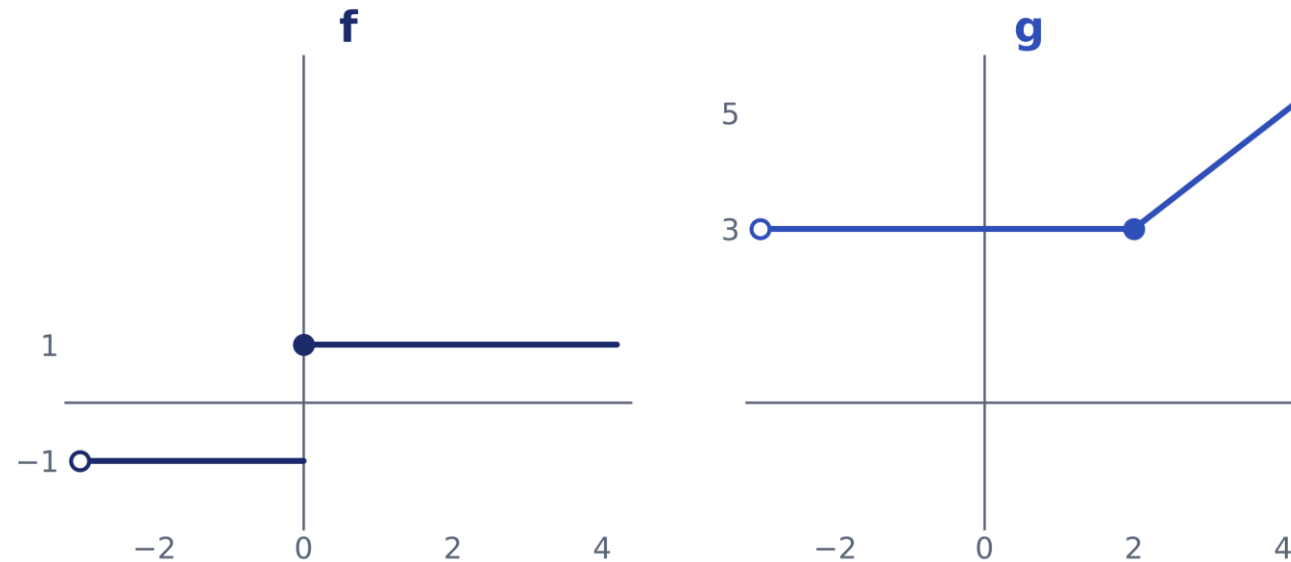
$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 2 \\ 3, & x < 2 \end{cases}$$

Η στρατηγική

Και οι δύο συναρτήσεις αλλάζουν τύπο σε ένα σημείο: η f στο 0, η g στο 2. Σπάμε λοιπόν τον άξονα στα ΤΡΙΑ διαστήματα που ορίζουν μαζί τα δύο αυτά σημεία και δουλεύουμε χωριστά σε καθένα.

$$x < 0 \quad 0 \leq x < 2 \quad x \geq 2$$

Βήμα 1 — οι δύο γραφικές



και οι δύο είναι κλιμακωτές — τα σημεία αλλαγής είναι το 0 και το 2

Διαβάζουμε τους τρεις κλάδους

Για $x < 0$ είναι $f = -1$ και $g = 3$. Για $0 \leq x < 2$ είναι $f = 1$ και $g = 3$. Για $x \geq 2$ είναι $f = 1$ και $g = x + 1$.
Ο κενός κύκλος σημαίνει ότι το άκρο δεν ανήκει στον κλάδο· ο γεμάτος ότι ανήκει.

Βήμα 2 — άθροισμα και διαφορά

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 2 \\ 4, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

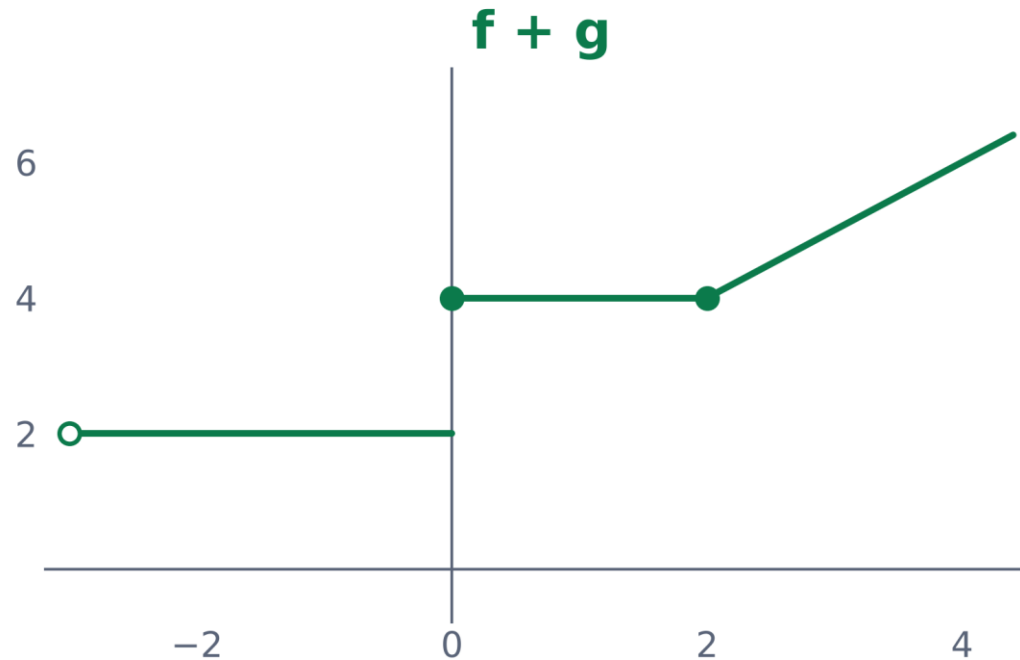
$$(f - g)(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 2 \\ -2, & 0 \leq x < 2 \\ -4, & x < 0 \end{cases}$$

Ο έλεγχος που αξίζει να κάνετε πάντα

Σε κάθε σημείο αλλαγής ελέγχουμε και τους δύο γειτονικούς κλάδους. Στο $x = 2$: από αριστερά $(f+g) = 4$, από δεξιά $2 + 2 = 4$ — συμφωνούν. Στο $x = 0$: από αριστερά 2, από δεξιά 4 — εδώ υπάρχει άλμα, και σωστά.

Η $(f + g)$ είναι συνεχής στο 2 αλλά όχι στο 0.

Η γραφική του αθροίσματος



τρεις κλάδοι, γιατί τα σημεία αλλαγής των f και g συνδυάζονται

Τι βλέπουμε

Τρεις κλάδοι, ένα άλμα στο 0 και καμία ασυνέχεια στο 2 — ακριβώς όσα βρήκαμε αλγεβρικά.

Βήμα 3 — γινόμενο και πηλίκο

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 2 \\ 3, & 0 \leq x < 2 \\ -3, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 2 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{3}, & x < 0 \end{cases}$$

Γιατί το πηλίκο ορίζεται παντού εδώ

Το πηλίκο f/g χρειάζεται $g(x) \neq 0$. Στο παράδειγμά μας $g(x) = 3$ για $x < 2$ και $g(x) = x + 1 \geq 3$ για $x \geq 2$, άρα $g(x) \geq 3 > 0$ για κάθε x . Το πεδίο ορισμού του πηλίκου είναι λοιπόν ολόκληρο το $\mathbb{R}$ — πράγμα που δεν συμβαίνει συνήθως.

Το g/f ορίζεται επίσης παντού, αφού $f(x) = \pm 1 \neq 0$.

Βήμα 4 — οι δύο συνθέσεις

Εδώ το παράδειγμα γίνεται ιδιαίτερα διδακτικό.

$$(f \circ g)(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γιατί $f \circ g \equiv 1$

Η g παίρνει μόνο τιμές ≥ 3 , δηλαδή πάντα θετικές. Άρα η f εφαρμόζεται πάντα σε θετικό αριθμό και δίνει πάντα 1.

Γιατί $g \circ f \equiv 3$

Η f παίρνει μόνο τις τιμές 1 και -1 , που είναι και οι δύο μικρότερες του 2. Άρα η g εφαρμόζεται πάντα στον κλάδο « $x < 2$ » και δίνει 3.

Δύο σταθερές συναρτήσεις — και όμως διαφορετικές: $f \circ g \neq g \circ f$

3

Ιδιότητες συναρτήσεων

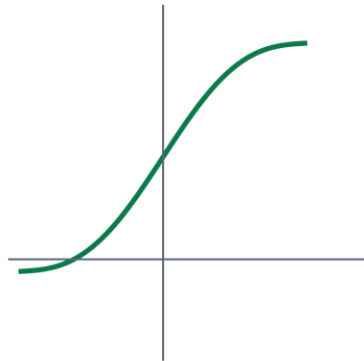
Μονοτονία, φράγματα, βασικά είδη και η αντίστροφη

Μονοτονία και φράγματα

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{αύξουσα}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \text{φθίνουσα}$$

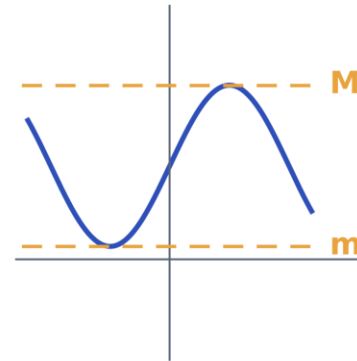
γνησίως αύξουσα



γνησίως φθίνουσα



φραγμένη



υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$

Βασικά είδη συναρτήσεων

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Πολυωνυμικές

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.
Ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$ και
είναι συνεχείς παντού.

Ρητές

$R(x) = P(x)/Q(x)$.
Πεδίο ορισμού όλα τα x
με $Q(x) \neq 0$.

Τριγωνομετρικές

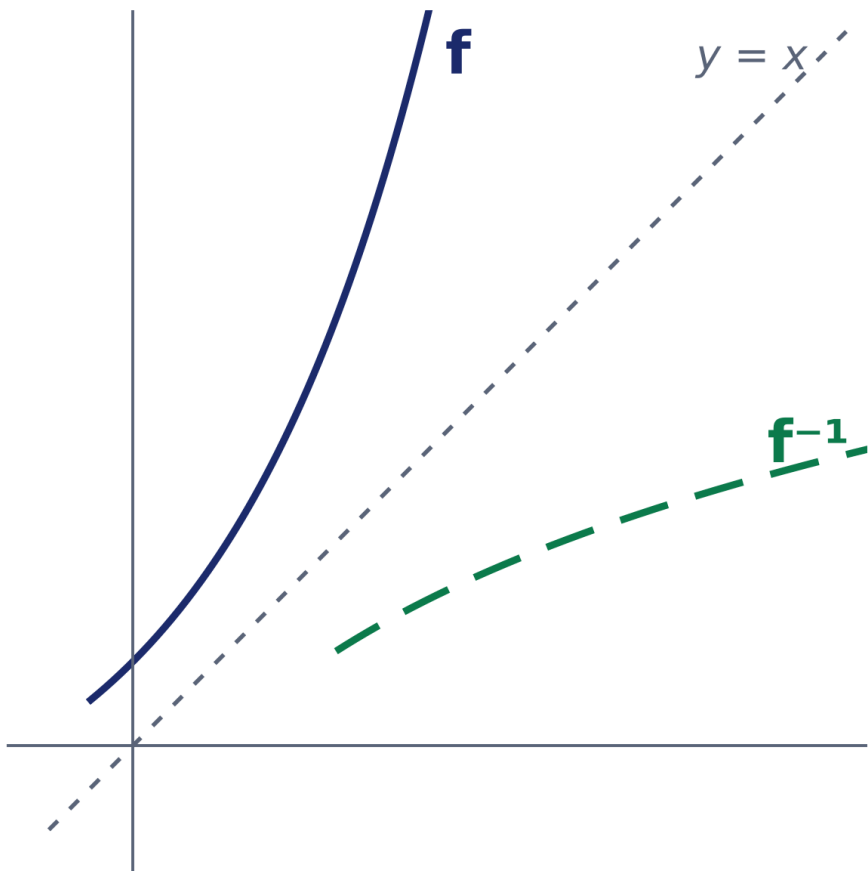
$\eta \mu x$, $\sigma \upsilon \nu x$, $\epsilon \phi x$ και οι
συνδυασμοί τους. Περιοδικές
— και οι δύο πρώτες
φραγμένες.

Μια παρατήρηση για την κλίμακα

Κάθε πολυωνυμική είναι ρητή (με $Q \equiv 1$), αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Η διάκριση έχει σημασία επειδή οι ρητές εισάγουν για πρώτη φορά σημεία όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται — και εκεί ακριβώς θα χρειαστούμε τα όρια.

Η αντίστροφη συνάρτηση

Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$



$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Πότε υπάρχει

Ακριβώς όταν η f είναι 1-1. Τότε ορίζεται $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$, και μάλιστα μονοσήμαντα.

Ο συμβολισμός παραπλανά

Το f^{-1} ΔΕΝ σημαίνει $1/f$. Είναι η αντίστροφη ως προς τη σύνθεση, όχι ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Λυμένη άσκηση — μονοτονία

Εκφώνηση

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) > 1$ για κάθε x , η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) - 3f(x) - x = 0.$$

Να διερευνηθεί η μονοτονία της f .

Δεν έχουμε τύπο για την f — μόνο μια εξίσωση που την περιγράφει. Δουλεύουμε με τον λόγο μεταβολής.

Βήμα 1 — γράφουμε τη διαφορά $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια της σχέσης

$$x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2)) [f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3]$$

Από πού προκύπτει

Η σχέση δίνει $x = f^3(x) - 3f(x)$. Αφαιρούμε την ίδια σχέση για x_1 και x_2 και παραγοντοποιούμε τη διαφορά κύβων: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Λυμένη άσκηση — η λύση

Βήμα 2 — λύνουμε ως προς τον λόγο μεταβολής

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3} > 0$$

Βήμα 3 — ελέγχουμε το πρόσημο του παρονομαστή

Εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση $f > 1$

Αφού $f(x_1) > 1$ και $f(x_2) > 1$, καθένας από τους τρεις όρους $f^2(x_1)$, $f(x_1)f(x_2)$ και $f^2(x_2)$ είναι μεγαλύτερος του 1. Το άθροισμά τους είναι λοιπόν μεγαλύτερο του 3, οπότε ο παρονομαστής είναι γνησίως θετικός.

$\lambda > 0$ για κάθε $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Μια παρατήρηση αυστηρότητας

Η άσκηση λέει « $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ». Αξίζει να ελέγξουμε αν τέτοια f υπάρχει πράγματι.

Τι λέει η σχέση

Θέτουμε $\phi(u) = u^3 - 3u$. Η σχέση γράφεται $x = \phi(f(x))$, δηλαδή κάθε x είναι τιμή της ϕ πάνω στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Τι δίνει η ϕ

$\phi'(u) = 3(u^2 - 1) > 0$ για $u > 1$, άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα εκεί, με $\phi(1) = -2$. Το σύνολο τιμών της είναι $(-2, +\infty)$.

Άρα η σχέση μπορεί να ισχύει μόνο για $x > -2$, όχι σε όλο το $\mathbb{R}$

Τι σώζεται — και είναι το ζητούμενο

Η απόδειξη της μονοτονίας παραμένει απολύτως σωστή: δείχνει ότι όπου ορίζεται τέτοια f , εκεί είναι γνησίως αύξουσα. Αυτή ακριβώς είναι η σωστή διατύπωση.

4

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Υπακολουθίες, Bolzano–Weierstrass και ακολουθίες Cauchy

Ορισμός και φράγματα

Μια ακολουθία δεν είναι καινούργιο αντικείμενο: είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$.

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto a(n) \equiv a_n$$

Συνήθως συμβολίζεται με (a_n) , (b_n) , (γ_n) αντί για $a(n)$.

(a_n) φραγμένη $\iff$ το σύνολο $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο

Η λεπτή διαφορά που ξεχνιέται

Το «φραγμένη» αφορά το ΣΥΝΟΛΟ των τιμών, όχι τη συμπεριφορά στο άπειρο. Η $(-1)^n$ είναι φραγμένη χωρίς να συγκλίνει, ενώ η $1/n$ είναι φραγμένη και συγκλίνει. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία όμως είναι αναγκαστικά φραγμένη.

Υπακολουθίες

(b_n) υπακολουθία της $(a_n) \iff$ υπάρχουν $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ με $b_n = a_{k_n}$

Τι σημαίνει στην πράξη

Κρατάμε κάποιους όρους της (a_n) και πετάμε τους υπόλοιπους, διατηρώντας όμως τη σειρά τους. Η επιλογή πρέπει να είναι άπειρη.

Παραδείγματα

Από την (a_n) : οι άρτιοι όροι $a_2, a_4, a_6, \dots$ και οι περιττοί $a_1, a_3, a_5, \dots$ είναι και οι δύο υπακολουθίες.

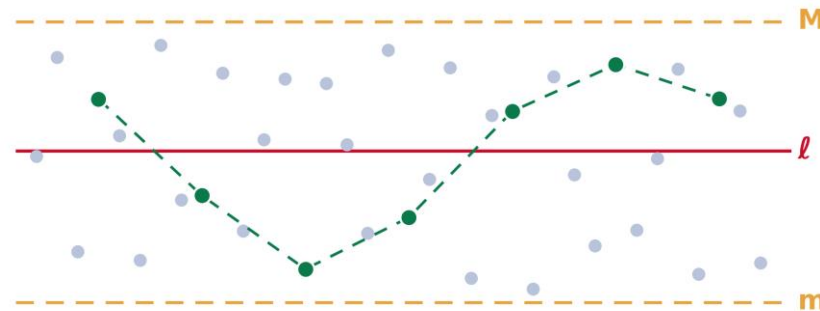
Αν $(a_n) \rightarrow \ell$, τότε ΚΑΘΕ υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο ℓ

Το χρησιμοποιούμε κυρίως ανάποδα: δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια $\Rightarrow$ η ακολουθία δεν συγκλίνει

Το θεώρημα Bolzano–Weierstrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

Bolzano–Weierstrass



η ίδια η ακολουθία μπορεί να μη συγκλίνει — μια υπακολουθία της όμως συγκλίνει πάντα

Τι εγγυάται και τι όχι

Εγγυάται ότι υπάρχει ΜΙΑ συγκλίνουσα υπακολουθία — όχι ότι συγκλίνει η ίδια η ακολουθία, ούτε ότι το όριο είναι μοναδικό. Η $(-1)^n$ έχει δύο τέτοιες υπακολουθίες, με όρια 1 και -1 .

Μονότονη και φραγμένη

φραγμένη + μονότονη $\implies$ συγκλίνουσα

Γιατί δουλεύει

Αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, το supremum του συνόλου των τιμών υπάρχει από το αξίωμα πληρότητας — και αποδεικνύεται ότι είναι ακριβώς το όριο.

Γιατί είναι τόσο χρήσιμο

Αποδεικνύει τη σύγκλιση χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το όριο. Αυτό είναι το κλειδί για τις αναδρομικές ακολουθίες.

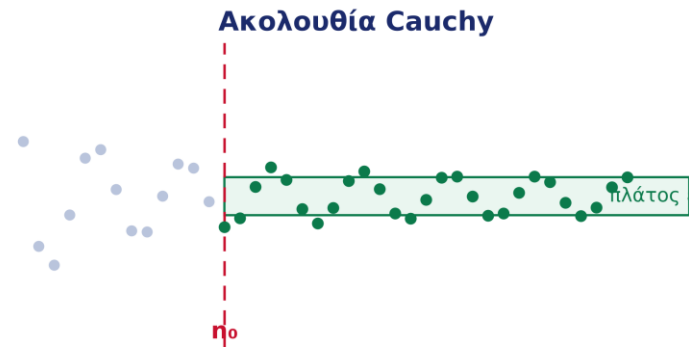
Η συνταγή για αναδρομικές ακολουθίες

(1) Δείχνουμε με επαγωγή ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. (2) Δείχνουμε ότι είναι μονότονη. (3) Συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει. (4) Περνάμε στο όριο μέσα στον αναδρομικό τύπο και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Ακολουθίες Cauchy

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$



μετά τον δείκτη n_0 όλοι οι όροι απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ε

Η ουσία του ορισμού

Οι όροι πλησιάζουν ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ — όχι κάποιο όριο που πρέπει να το ξέρουμε από πριν. Γι' αυτό το κριτήριο Cauchy είναι εσωτερικό: ελέγχεται αποκλειστικά από την ίδια την ακολουθία.

Το θεώρημα πληρότητας

$$(a_n) \text{ συγκλίνει} \iff (a_n) \text{ είναι Cauchy}$$

Η εύκολη κατεύθυνση

Αν η (a_n) συγκλίνει στο ℓ , τότε για μεγάλα n και m και οι δύο όροι είναι κοντά στο ℓ , άρα και μεταξύ τους. Χρειάζεται μόνο η τριγωνική ανισότητα.

Η δύσκολη κατεύθυνση

Μια ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη· από Bolzano–Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία· και η ιδιότητα Cauchy αναγκάζει ΟΛΗ την ακολουθία να ακολουθήσει το ίδιο όριο.

Γιατί λέγεται «πληρότητα»

Στο $\mathbb{Q}$ το θεώρημα ΔΕΝ ισχύει: η ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ είναι Cauchy μέσα στο $\mathbb{Q}$ αλλά δεν έχει ρητό όριο. Το $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς το σύνολο στο οποίο συμπληρώνονται αυτά τα κενά.

5

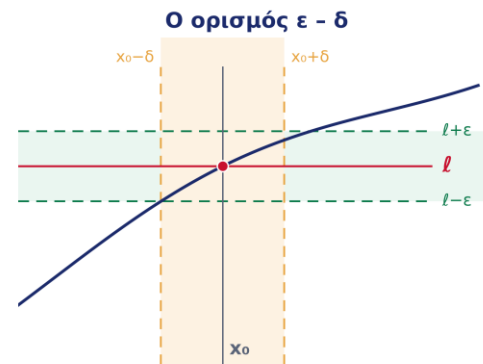
Όρια συναρτήσεων

Ο ορισμός ε - δ , πλευρικά όρια και η αρχή της μεταφοράς

Ο ορισμός $\varepsilon - \delta$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



δοθέντος του ε (πράσινη ζώνη) βρίσκουμε δ (κίτρινη λωρίδα) ώστε η γραφική να μη βγαίνει από τη ζώνη

Το κλειδί είναι η σειρά των ποσοδεικτών

Πρώτα δίνεται το ε και μετά βρίσκουμε το δ — γι' αυτό γράφουμε $\delta = \delta(\varepsilon)$. Αν αντιστρέψουμε τη σειρά, ο ορισμός αλλάζει νόημα εντελώς.

Τα υπόλοιπα είδη ορίων

Ο ίδιος ορισμός προσαρμόζεται όταν το x_0 ή το όριο είναι $\pm\infty$ — αλλάζουν μόνο οι περιοχές.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Περιοχή του x_0

Για πεπερασμένο x_0 είναι το $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Για $+\infty$ είναι το $(M, +\infty)$.

Περιοχή του ορίου

Για πεπερασμένο ℓ είναι το $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Για $+\infty$ είναι το $(K, +\infty)$.

Εννέα συνδυασμοί

Τρεις επιλογές για το x_0 επί τρεις για το ℓ . Η λογική όμως είναι μία και η ίδια.

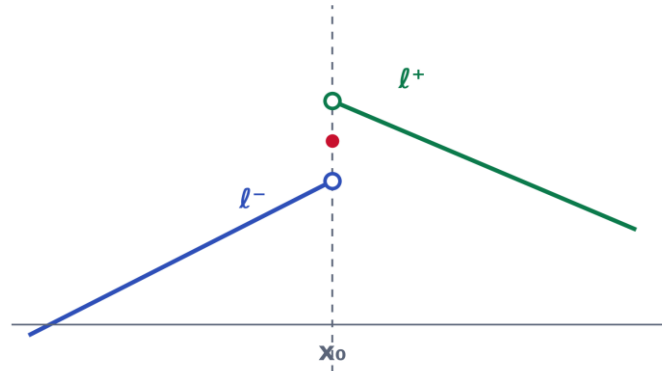
Ένα λάθος που γίνεται συχνά

Το « $\lim = +\infty$ » ΔΕΝ σημαίνει ότι το όριο υπάρχει. Σημαίνει ότι δεν υπάρχει πραγματικό όριο, και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο δεν υπάρχει. Στο $\mathbb{R}$ η σύγκλιση απαιτεί πεπερασμένο όριο.

Πλευρικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Όταν τα πλευρικά όρια διαφέρουν



$l^- \neq l^+ \Rightarrow$ το όριο στο x_0 ΔΕΝ υπάρχει, όποια κι αν είναι η τιμή $f(x_0)$

Πώς το χρησιμοποιούμε

Σε κάθε συνάρτηση που αλλάζει τύπο σε ένα σημείο — όπως οι κλιμακωτές της ενότητας 2 — το όριο στο σημείο αλλαγής ελέγχεται πάντα με τα δύο πλευρικά όρια χωριστά.

Η αρχή της μεταφοράς

Το θεώρημα που μετατρέπει κάθε ερώτημα για όρια συναρτήσεων σε ερώτημα για ακολουθίες.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff$$

για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$

ισχύει για $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

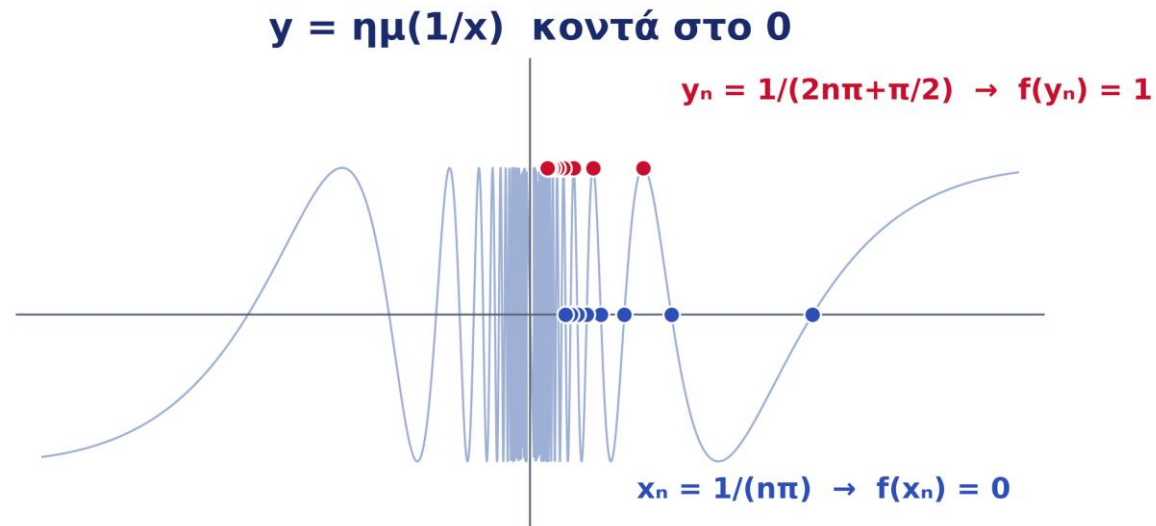
Η κατεύθυνση που δείχνει ύπαρξη

Σπανιότερα χρήσιμη, γιατί απαιτεί έλεγχο για ΚΑΘΕ ακολουθία — δηλαδή για άπειρες το πλήθος.

Η κατεύθυνση που δείχνει ανυπαρξία

Εδώ βρίσκεται όλη η πρακτική αξία: ΜΙΑ ακολουθία με λάθος όριο, ή ΔΥΟ με διαφορετικά όρια, αρκούν για να αποκλείσουμε το όριο.

Το κλασικό αντιπαράδειγμα



δύο ακολουθίες που τείνουν στο 0 δίνουν διαφορετικά όρια $\Rightarrow$ το όριο δεν υπάρχει

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 \text{ με } f(x_n) = 0 \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \rightarrow 0 \text{ με } f(y_n) = 1$$

Δύο ακολουθίες που τείνουν στο 0 δίνουν 0 και 1 $\Rightarrow$ το $\lim \eta\mu(1/x)$ στο 0 δεν υπάρχει

6

Αναδρομικοί τύποι

Από τον αναδρομικό στον αναλυτικό τύπο, με επαγωγή

Τι είναι ο αναδρομικός τύπος

Η ακολουθία ορίζεται βήμα-βήμα: δίνονται ένας ή περισσότεροι αρχικοί όροι και ένας κανόνας.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_0 = 1 \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}, \qquad a_0 = 1$$

Πρώτης τάξης

Ο επόμενος όρος εξαρτάται μόνο από τον προηγούμενο. Χρειάζεται ένας αρχικός όρος.

Δεύτερης τάξης

Εξαρτάται από τους δύο προηγούμενους — όπως η ακολουθία Fibonacci. Χρειάζονται δύο αρχικοί όροι.

Μη γραμμικοί

Όπως η $\sqrt{3+a_n}$. Εδώ σπάνια υπάρχει κλειστός τύπος — μελετάμε τη σύγκλιση.

Ο στόχος

Όπου γίνεται, να περάσουμε στον αναλυτικό τύπο $a_n = (\text{έκφραση του } n)$ — και μετά να τον αποδείξουμε.

Λυμένο παράδειγμα — η εκφώνηση

$$a_{n+1} = a_n + 7, \quad a_3 = 1$$

Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της ακολουθίας.

Βήμα 1 — γράφουμε μερικούς όρους για να «μαντέψουμε» τον τύπο

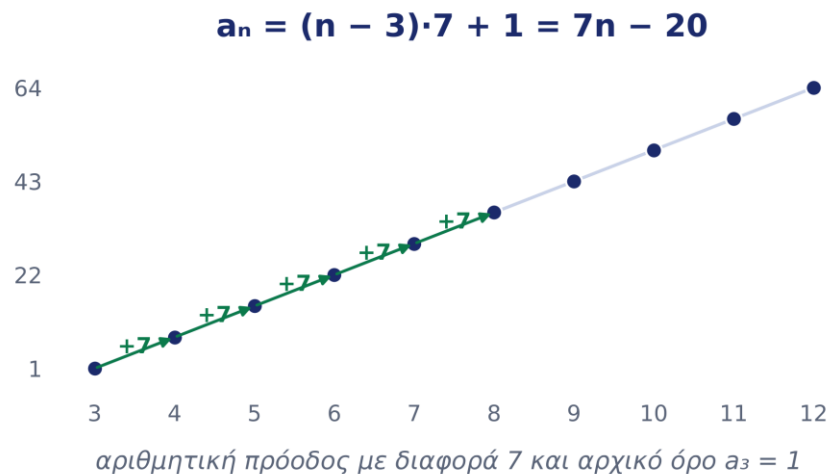
$$a_3 = 1, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 15, \quad a_6 = 22, \quad \dots$$

Η παρατήρηση που οδηγεί στον τύπο

Κάθε όρος είναι 7 περισσότερο από τον προηγούμενο, και ξεκινάμε από τον δείκτη 3. Για να φτάσουμε στον a_n κάνουμε $n - 3$ βήματα των 7, ξεκινώντας από το 1: $a_n = (n - 3) \cdot 7 + 1$.

Ο αναλυτικός τύπος

$$a_n = (n - 3) \cdot 7 + 1 = 7n - 20, \quad n \geq 3$$



Αριθμητική πρόοδος

Κάθε αναδρομή της μορφής $a_{(n+1)} = a_n + d$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά d . Ο γενικός τύπος είναι πάντα $a_n = a_{(n_0)} + (n - n_0) \cdot d$.

Η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή

Η παρατήρηση δεν είναι απόδειξη. Το ότι ισχύει για τέσσερις όρους δεν εγγυάται τίποτε για τους υπόλοιπους.

1

Βάση

Για $n = 3$: $a_3 = (3 - 3) \cdot 7 + 1 = 0 + 1 = 1 \checkmark$ — συμφωνεί με το δεδομένο.

2

Επαγωγική υπόθεση

Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάποιο $n = k \geq 3$, δηλαδή $a_k = (k - 3) \cdot 7 + 1$.

3

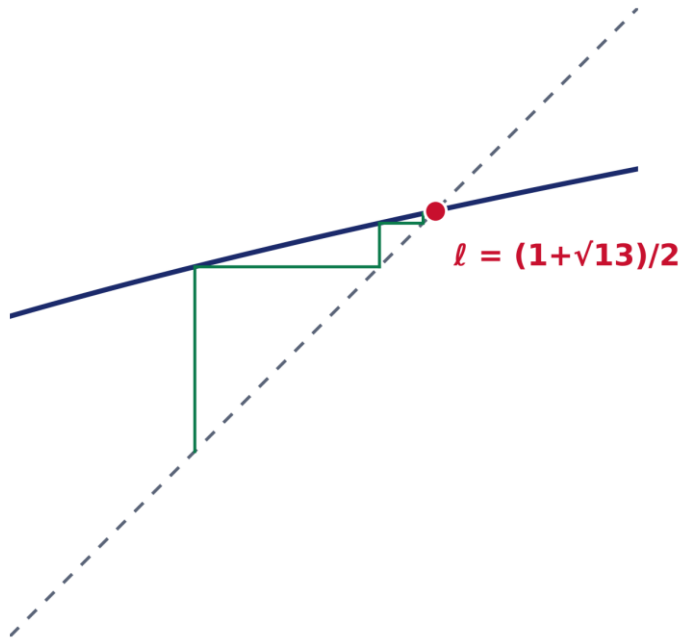
Επαγωγικό βήμα

Δείχνουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο.

$$a_{k+1} = a_k + 7 = [(k - 3) \cdot 7 + 1] + 7 = [(k + 1) - 3] \cdot 7 + 1$$

Όταν δεν υπάρχει κλειστός τύπος

$$a_{(n+1)} = \sqrt{3 + a_n}, \quad a_0 = 1$$



αύξουσα και άνω φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει· το όριο λύνει την $l^2 = 3 + l$

Δεν ψάχνουμε τύπο

Για την $a_{(n+1)} = \sqrt{3 + a_n}$ δεν υπάρχει απλή κλειστή μορφή. Αποδεικνύουμε όμως ότι συγκλίνει.

Μονότονη και φραγμένη

Με επαγωγή: $a_n < l$ για κάθε n , και $a_{(n+1)} > a_n$. Άρα η ακολουθία συγκλίνει.

Το όριο

Περνάμε στο όριο: $l = \sqrt{3 + l} \Rightarrow l^2 - l - 3 = 0 \Rightarrow l = (1 + \sqrt{13})/2 \approx 2,3028$.

7

Ασκήσεις

Οκτώ ασκήσεις σε όλη την ύλη της διάλεξης

Ασκήσεις 1 – 3

1 Για τις $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 + 1$ να βρεθούν οι $f \circ g$ και $g \circ f$. Είναι ίσες;

$$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = x^2 + 1$$

2 Ναδειχθεί ότι η f είναι 1–1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, \quad x \neq 3$$

3 Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος και να αποδειχθεί με επαγωγή.

$$a_{n+1} = 3a_n - 2, \quad a_1 = 2$$

Ασκήσεις 4 – 6

4

Ναδειχθεί ότι $0 < a_n < 2$ και ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Ποιο είναι το όριό της;

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

5

Υπάρχει το όριο της f στο σημείο $x_0 = 1$;

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 3-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

6

Υπάρχει το παρακάτω όριο; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ασκήσεις 7 – 8

7

Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη και γνησίως αύξουσα, και να βρεθούν τα όριά της στο $\pm\infty$.

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

8

Συγκλίνει η ακολουθία; Είναι φραγμένη;

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

Πριν δείτε τις λύσεις

Ποια εργαλεία χρειάζεται καθεμία

- 1, 2 $\rightarrow$ σύνθεση και αντίστροφη.
- 3 $\rightarrow$ επαγωγή.
- 4 $\rightarrow$ μονότονη + φραγμένη.
- 5 $\rightarrow$ πλευρικά όρια.
- 6, 8 $\rightarrow$ αρχή της μεταφοράς και υπακολουθίες.
- 7 $\rightarrow$ φράγματα και όρια στο άπειρο.

Η γενική συμβουλή

Σε κάθε ερώτημα «υπάρχει το όριο;» η απάντηση «όχι» αποδεικνύεται με δύο ακολουθίες. Η απάντηση «ναι» θέλει είτε πλευρικά όρια είτε ε - δ .

Προσπαθήστε πρώτα μόνοι σας — οι λύσεις ακολουθούν

Οι λύσεις που ακολουθούν είναι ενδεικτικές

Σε αρκετές ασκήσεις υπάρχουν εναλλακτικοί δρόμοι εξίσου σωστοί. Αυτό που μετράει είναι η πληρότητα της αιτιολόγησης, όχι η ταύτιση με τη λύση του φυλλαδίου.

8

Ενδεικτικές λύσεις

Μία διαφάνεια ανά άσκηση

Λύση 1 — σύνθεση

$$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = x^2 + 1$$

Υπολογισμός

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1.$$

$$(g \circ f)(x) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10.$$

Είναι ίσες;

Όχι. Η εξίσωση $2x^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 10$ δίνει $2x^2 - 12x + 11 = 0$, δηλαδή $x = 3 \pm \sqrt{14} / 2$. Οι δύο συνθέσεις συμπίπτουν μόνο σε αυτά τα δύο σημεία — πουθενά αλλού.

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1, \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 10$$

Λύση 2 — αντίστροφη

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, \quad x \neq 3$$

Λύνουμε ως προς x

Θέτουμε $y = (2x+1)/(x-3)$. Πολλαπλασιάζουμε: $y(x-3) = 2x+1$, δηλαδή $yx - 3y = 2x+1$, άρα $x(y-2) = 3y+1$.

Γιατί αυτό αποδεικνύει και το 1–1

Για κάθε $y \neq 2$ η εξίσωση έχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ λύση ως προς x . Μοναδικότητα λύσης σημαίνει ακριβώς ότι η f είναι 1–1, και ταυτόχρονα μας δίνει τον τύπο της αντίστροφης.

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}, \quad y \neq 2$$

Λύση 3 — επαγωγή

$$a_{n+1} = 3a_n - 2, \quad a_1 = 2$$

Εικασία

$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 10, a_4 = 28, a_5 = 82$. Οι διαφορές από τη μονάδα είναι 1, 3, 9, 27, 81 — δυνάμεις του 3. Άρα εικάζουμε $a_n = 3^{n-1} + 1$.

Επαγωγή

Βάση: $a_1 = 3^0 + 1 = 2 \checkmark$. Βήμα: αν $a_k = 3^{k-1} + 1$, τότε $a_{(k+1)} = 3a_k - 2 = 3(3^{k-1} + 1) - 2 = 3^k + 3 - 2 = 3^k + 1$, που είναι ο τύπος για $k + 1$. ■

$$a_n = 3^{n-1} + 1$$

Λύση 4 — μονότονη και φραγμένη

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Φράγμα με επαγωγή

$a_1 = \sqrt{2} < 2$. Αν $a_n < 2$, τότε $a_{(n+1)} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2$. Άρα $0 < a_n < 2$ για κάθε n .

Μονοτονία

$a_{(n+1)} > a_n \iff 2 + a_n > a_n^2 \iff a_n^2 - a_n - 2 < 0 \iff (a_n - 2)(a_n + 1) < 0$, που ισχύει αφού $0 < a_n < 2$.

Το όριο

Μονότονη και φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει σε κάποιο ℓ . Περνάμε στο όριο: $\ell = \sqrt{2 + \ell} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow \ell = 2$ (η ρίζα -1 απορρίπτεται, αφού $a_n > 0$).

Λύση 5 — πλευρικά όρια

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Από αριστερά

Για $x < 1$ ισχύει $f(x) = x + 1$, άρα το αριστερό όριο είναι $1 + 1 = 2$.

Από δεξιά

Για $x \geq 1$ ισχύει $f(x) = 3 - x$, άρα το δεξί όριο είναι $3 - 1 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Λύση 6 — η αρχή της μεταφοράς

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Η στρατηγική

Για να δείξουμε ότι το όριο ΔΕΝ υπάρχει, βρίσκουμε δύο ακολουθίες που τείνουν στο 0 και δίνουν διαφορετικά όρια εικόνων.

Οι δύο ακολουθίες

Παίρνουμε $x_n = 1/(2n\pi)$, οπότε $1/x_n = 2n\pi$ και $\sin(2n\pi) = 1$ για κάθε n .

Παίρνουμε $y_n = 1/((2n+1)\pi)$, οπότε $\sin((2n+1)\pi) = -1$ για κάθε n .

Συμπέρασμα

Και οι δύο ακολουθίες τείνουν στο 0, αλλά οι εικόνες τους τείνουν σε 1 και σε -1. Από την αρχή της μεταφοράς, το όριο δεν υπάρχει. ■

Λύση 7 — φραγμένη και μονότονη

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Φραγμένη

$|f(x)| = |x| / (1 + |x|) < 1$, αφού ο παρονομαστής είναι γνησίως μεγαλύτερος του αριθμητή. Άρα $-1 < f(x) < 1$ για κάθε x .

Γνησίως αύξουσα — άρα και 1-1

Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = x/(1+x) = 1 - 1/(1+x)$, προφανώς αύξουσα. Για $x < 0$ είναι $f(x) = x/(1-x) = -1 + 1/(1-x)$, επίσης αύξουσα. Οι δύο κλάδοι ενώνονται ομαλά στο 0.

Όρια στο άπειρο

Διαιρώντας με $|x|$: $f(x) = \operatorname{sgn}(x) / (1/|x| + 1) \rightarrow \pm 1$ καθώς $x \rightarrow \pm\infty$. Οι ευθείες $y = \pm 1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες, που δεν τέμνονται ποτέ.

Λύση 8 — υπακολουθίες

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

Φραγμένη

$|a_n| = n/(n+1) < 1$ για κάθε n , άρα η ακολουθία είναι φραγμένη.

Δύο υπακολουθίες

Οι άρτιοι όροι: $a_{2n} = 2n/(2n+1) \rightarrow 1$.

Οι περιττοί όροι: $a_{2n+1} = -(2n+1)/(2n+2) \rightarrow -1$.

Συμπέρασμα

Αν η (a_n) συνέκλινε, κάθε υπακολουθία της θα είχε το ίδιο όριο. Βρήκαμε δύο με διαφορετικά όρια, άρα δεν συγκλίνει — αν και είναι φραγμένη, όπως εγγυάται και το Bolzano–Weierstrass.

Τι κρατάμε από τη διάλεξη

1

Ο ορισμός της συνάρτησης

Κάθε x ακριβώς μία εικόνα. Το 1–1 και το επί είναι δύο ανεξάρτητες επιπλέον ιδιότητες.

2

Η σύνθεση δεν αντιμετατίθεται

$f \circ g \neq g \circ f$ γενικά — αλλά η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει πάντα.

3

Μονότονη και φραγμένη

Το εργαλείο που αποδεικνύει σύγκλιση χωρίς να ξέρουμε το όριο εκ των προτέρων.

4

Η αρχή της μεταφοράς

Μετατρέπει κάθε ερώτημα για όρια συναρτήσεων σε ερώτημα για ακολουθίες.

5

Η επαγωγή κλείνει την απόδειξη

Η παρατήρηση ενός μοτίβου είναι εικασία· η επαγωγή τη μετατρέπει σε θεώρημα.
