

Μαθηματικός Λογισμός Ι - 3η Διάλεξη

Ασκήσεις στους μιγαδικούς αριθμούς

Συμπληρωματικό υλικό εκτός της εξεταστέας ύλης

Η τρίτη διάλεξη συνεχίζει τη δεύτερη, στην οποία εισαγάγαμε τους μιγαδικούς αριθμούς, τον συζυγή, το μέτρο και την πολική μορφή. Εδώ εφαρμόζουμε αυτές τις έννοιες σε πέντε ασκήσεις. Η επιλογή της κατάλληλης μορφής ενός μιγαδικού είναι το βασικό εργαλείο: η καρτεσιανή μορφή εξυπηρετεί τους γεωμετρικούς τύπους, ενώ η πολική μορφή τις δυνάμεις και τις ρίζες.

1 Οι δυνάμεις της φανταστικής μονάδας

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις του i . Ξεκινάμε από την ιδιότητα $i^2 = -1$ και βρίσκουμε:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Επειδή $i^4 = 1$, οι τιμές επαναλαμβάνονται ανά τέσσερις δυνάμεις. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n , η ευκλείδεια διαίρεση δίνει $n = 4k + r$, όπου το υπόλοιπο r είναι 0, 1, 2 ή 3. Συνεπώς:

$$i^{4k+r} = (i^4)^k i^r = i^r.$$

Παράδειγμα από τις σημειώσεις

$$163 = 4 \cdot 40 + 3, \quad i^{163} = (i^4)^{40} i^3 = -i.$$

Για να υπολογίσουμε μια μεγάλη δύναμη, αρκεί επομένως να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του εκθέτη με το 4. Γεωμετρικά, ο πολλαπλασιασμός με i στρέφει ένα διάνυσμα κατά $\pi/2$ αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Τέσσερις τέτοιες στροφές το επαναφέρουν στην αρχική θέση.

Μικρός έλεγχος

$$i^{2026} = -1, \quad i^{2027} = -i, \quad i^{2028} = 1.$$

Τα αντίστοιχα υπόλοιπα είναι 2, 3 και 0. Η περιοδικότητα δεν χρειάζεται να απομνημονεύεται ως ανεξάρτητος κανόνας: προκύπτει από το $i^4 = 1$.

2 Γεωμετρικός τόπος στο μιγαδικό επίπεδο

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν:

$$z\bar{z} - (\varphi\bar{z} + \bar{\varphi}z) + \nu = 0, \quad \varphi \in \mathbb{C}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Ο αριθμός φ είναι σταθερός. Θέτουμε $z=x+yi$ και $\varphi=a+bi$, με x,y,a,b πραγματικούς. Τότε:

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Οι δύο όροι μέσα στην παρένθεση είναι συζυγείς μεταξύ τους. Επομένως το άθροισμά τους είναι δύο φορές το πραγματικό μέρος του πρώτου:

$$\varphi\bar{z} + \bar{\varphi}z = 2\operatorname{Re}(\varphi\bar{z}).$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο παίρνουμε:

$$(a + bi)(x - yi) = (ax + by) + (bx - ay)i.$$

Άρα η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by) + \nu = 0.$$

Συμπλήρωση τετραγώνων

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - \nu = |\varphi|^2 - \nu.$$

Θέτουμε $R^2 = |\varphi|^2 - \nu$. Αν $R^2 > 0$, ο τόπος είναι κύκλος με κέντρο (a,b) και ακτίνα R . Αν $R^2 = 0$, ο τόπος αποτελείται μόνο από το σημείο (a,b) . Αν $R^2 < 0$, ο τόπος είναι το κενό σύνολο, επειδή ένα άθροισμα πραγματικών τετραγώνων δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

Η ίδια εξίσωση μπορεί να γραφεί πιο σύντομα με το μέτρο:

$$|z - \varphi|^2 = |\varphi|^2 - \nu.$$

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα

Αν $\varphi = 1 + 2i$ και $\nu = 1$, τότε $|\varphi|^2 = 5$ και:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Πρόκειται για κύκλο με κέντρο $(1,2)$ και ακτίνα 2. Η μη αρνητικότητα του τετραγώνου της ακτίνας είναι απαραίτητη προϋπόθεση, όχι τυπική λεπτομέρεια.

3 Οι λύσεις της εξίσωσης z στην έκτη ίσον 64

Να βρεθούν όλες οι μιγαδικές λύσεις της εξίσωσης:

$$z^6 = 64.$$

Ο αριθμός 64 έχει μέτρο 64 και ένα όρισμά του είναι το 0. Γράφουμε:

$$64 = 2^6(\cos 0 + i \sin 0).$$

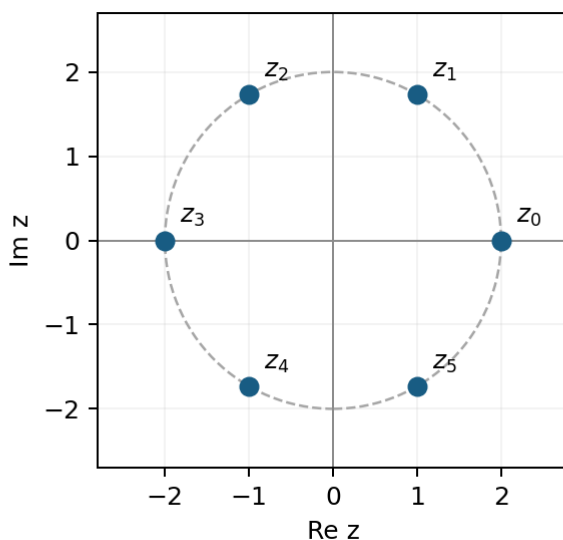
Από τον τύπο των μιγαδικών ριζών, όλες οι λύσεις έχουν μέτρο 2 και γωνίες που διαφέρουν κατά $2\pi/6=\pi/3$:

$$z_k = 2\left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Καρτεσιανή μορφή των έξι ριζών

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i.$$

$$z_3 = -2, \quad z_4 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_5 = 1 - \sqrt{3}i.$$



Σχήμα 1 Οι έξι ρίζες είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου σε κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα 2.

Οι ρίζες είναι διαφορετικές, επειδή οι έξι γωνίες είναι διαφορετικές modulo 2π . Υψώνοντας οποιαδήποτε ρίζα στην έκτη δύναμη, το μέτρο γίνεται $2^6=64$ και η γωνία γίνεται $2k\pi$, οπότε πράγματι προκύπτει ο αριθμός 64.

4 Μια εξίσωση δωδέκατου βαθμού

Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης:

$$z^{12} + 2z^6 + 2 = 0.$$

Πρώτο βήμα Η αντικατάσταση

Παρατηρούμε ότι $z^{12} = (z^6)^2$. Θέτουμε $w = z^6$ και μετατρέπουμε το πρόβλημα σε δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$w^2 + 2w + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι αρνητική:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4.$$

Άρα:

$$w_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i.$$

Επομένως αρκεί να λύσουμε χωριστά τις δύο εξισώσεις:

$$z^6 = -1 + i, \quad z^6 = -1 - i.$$

Δεύτερο βήμα Η σωστή πολική μορφή

Οι αριθμοί $-1+i$ και $-1-i$ έχουν μέτρο $\sqrt{2}$. Ο πρώτος βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο και ο δεύτερος στο τρίτο. Επιλέγουμε τα ορίσματα $3\pi/4$ και $5\pi/4$, αντίστοιχα:

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$-1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

Η επιλογή του τεταρτημορίου είναι κρίσιμη. Ο λόγος του φανταστικού προς το πραγματικό μέρος δεν προσδιορίζει μόνος του το όρισμα: η εφαπτομένη έχει περίοδο π .

Το κοινό μέτρο των τελικών ριζών

$$\rho = (\sqrt{2})^{1/6} = 2^{1/12}.$$

Το $\sqrt{2}$ είναι το μέτρο του w , όχι του z . Επειδή παίρνουμε έκτης ρίζες, το μέτρο του z είναι η έκτη ρίζα του $\sqrt{2}$.

4 Οι δώδεκα ρίζες και η γεωμετρία τους

Για $k=0,1,2,3,4,5$ θέτουμε:

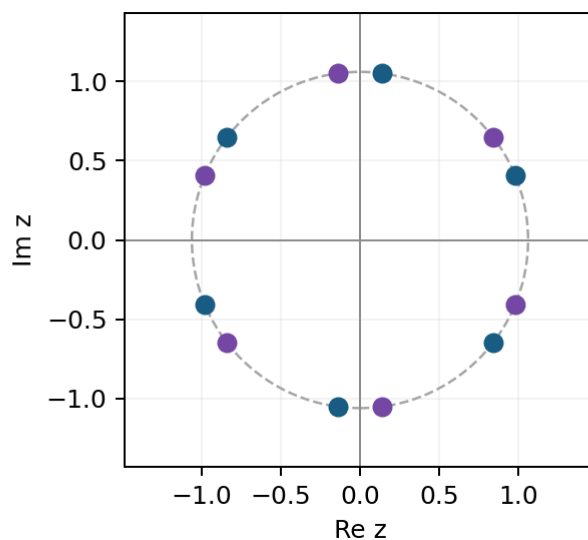
$$\alpha_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, \quad \beta_k = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{3}.$$

Οι δύο οικογένειες ριζών είναι:

$$z_k^+ = \rho(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k), \quad \rho = 2^{1/12}.$$

$$z_k^- = \rho(\cos\beta_k + i\sin\beta_k).$$

Η πρώτη οικογένεια λύνει τη $z^6 = -1+i$ και η δεύτερη τη $z^6 = -1-i$. Κάθε οικογένεια περιέχει έξι διαφορετικές ρίζες. Δεν έχουν κοινό στοιχείο, αφού η έκτη δύναμη ενός αριθμού δεν μπορεί να ισούται συγχρόνως με δύο διαφορετικούς αριθμούς. Συνεπώς έχουμε συνολικά δώδεκα διαφορετικές λύσεις.



Σχήμα 2 Μπλε ρίζες της $z^6 = -1+i$ και μωβ ρίζες της $z^6 = -1-i$, πάνω στον ίδιο κύκλο.

Δύο κανονικά εξάγωνα αλλά όχι κανονικό δωδεκάγωνο

Σε κάθε οικογένεια οι διαδοχικές γωνίες διαφέρουν κατά $\pi/3$, οπότε τα σημεία σχηματίζουν κανονικό εξάγωνο. Η δεύτερη οικογένεια είναι στραμμένη ως προς την πρώτη κατά:

$$\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{12}.$$

Στην ένωση των δύο οικογενειών οι γωνιακές αποστάσεις εναλλάσσονται μεταξύ $\pi/12$ και $\pi/4$. Σε κανονικό δωδεκάγωνο όλες θα ήταν ίσες με $\pi/6$. Επομένως οι δώδεκα ρίζες βρίσκονται στον ίδιο κύκλο, αλλά δεν σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.

5 Το θεώρημα των συζυγών ριζών

Έστω πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Αν ο μιγαδικός φ είναι ρίζα του, τότε και ο συζυγής του είναι ρίζα:

$$P(\varphi) = 0 \Rightarrow P(\overline{\varphi}) = 0.$$

Απόδειξη

Ξεκινάμε από την ισότητα $P(\varphi)=0$ και παίρνουμε συζυγή και στα δύο μέρη. Χρησιμοποιούμε ότι ο συζυγής ενός αθροίσματος είναι το άθροισμα των συζυγών και ο συζυγής ενός γινομένου είναι το γινόμενο των συζυγών:

$$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}, \quad \overline{uv} = \overline{u}\overline{v}.$$

Επειδή όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί, ο καθένας ταυτίζεται με τον συζυγή του. Άρα:

$$0 = \overline{P(\varphi)} = a_n (\overline{\varphi})^n + \dots + a_1 \overline{\varphi} + a_0 = P(\overline{\varphi}).$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Κάθε μη πραγματική ρίζα εμφανίζεται μαζί με τη συζυγή της. Μια πραγματική ρίζα ταυτίζεται με τον συζυγή της.

Γιατί η υπόθεση είναι απαραίτητη

Αν οι συντελεστές δεν είναι όλοι πραγματικοί, το συμπέρασμα μπορεί να αποτύχει. Για παράδειγμα:

$$P(z) = z - i, \quad P(i) = 0, \quad P(-i) = -2i \neq 0.$$

Ο αριθμός i είναι ρίζα, αλλά ο συζυγής του $-i$ δεν είναι. Η υπόθεση των πραγματικών συντελεστών είναι λοιπόν ουσιαστική.

Σύνδεση με τις προηγούμενες ασκήσεις

Οι εξισώσεις $z^6 - 64 = 0$ και $z^{12} + 2z^6 + 2 = 0$ έχουν πραγματικούς συντελεστές. Γι' αυτό τα σύνολα των ριζών τους είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα, όπως φαίνεται στα δύο σχήματα.

Τι κρατάμε από τη διάλεξη

Για δυνάμεις του i χρησιμοποιούμε την περιοδικότητα. Για γεωμετρικούς τόπους περνάμε σε καρτεσιανή μορφή. Για μιγαδικές ρίζες χρησιμοποιούμε την πολική μορφή και καταγράφουμε όλες τις γωνίες. Για συζυγείς ρίζες ελέγχουμε την υπόθεση των πραγματικών συντελεστών. Σε κάθε περίπτωση, οι προϋποθέσεις εξασφαλίζουν ότι η λύση είναι πλήρης και σωστή.