

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

3η Διάλεξη Μιγαδικοί αριθμοί — Ασκήσεις

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών · Τμήμα Στατιστικής



ασκήσεις

Οι πέντε ασκήσεις της διάλεξης

1

Δυνάμεις του i

Η περιοδικότητα με περίοδο 4 και ο τύπος $i^{(4k+\lambda)}$

2

Γεωμετρικός τόπος

$z \cdot \bar{z} - (\phi \bar{z} + \bar{\phi} z) + r = 0$ — τι σχήμα είναι;

3

Η εξίσωση $z^6 = 64$

Πολική μορφή και τύπος De Moivre

4

Η εξίσωση $z^{12} + 2z^6 + 2 = 0$

Αντικατάσταση $w = z^6$ και δώδεκα ρίζες

5

Συζυγείς ρίζες

Πραγματικοί συντελεστές $\Rightarrow$ οι ρίζες σε συζυγή ζεύγη

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε

Συζυγής

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad z_1 \cdot z_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Μέτρο και πολική μορφή

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\theta = \text{Arg}(z) \text{ κατά τεταρτημόριο}$$

$$\text{De Moivre: } [r (\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\text{n-οστές ρίζες: } z_k = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\theta + 2k\pi)/n + i \sin (\theta + 2k\pi)/n], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Ο κανόνας που κρύβεται πίσω από όλα

Στον πολλαπλασιασμό τα μέτρα πολλαπλασιάζονται και τα ορίσματα προστίθενται. Κάθε άσκηση παρακάτω είναι μια εφαρμογή αυτής της πρότασης.

1

Δυνάμεις του i

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις της φανταστικής μονάδας

Οι πρώτες δυνάμεις

Ξεκινάμε από τον ορισμό $i^2 = -1$ και προχωράμε με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς.

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

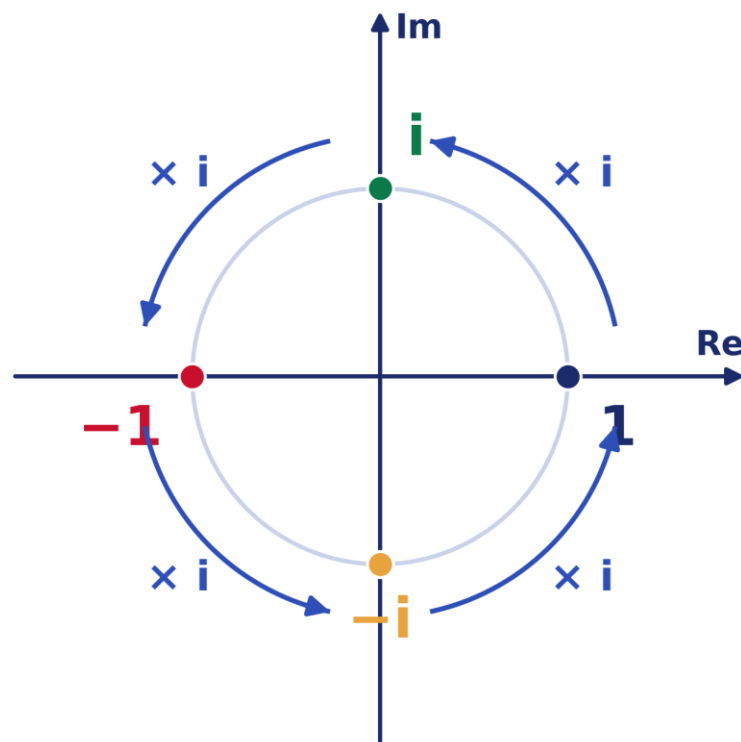
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

Οι τιμές επαναλαμβάνονται με περίοδο 4: $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$

Γεωμετρική ερμηνεία

Πολλαπλασιασμός με i = στροφή κατά 90°



Γιατί περίοδος 4

Κάθε πολλαπλασιασμός με i στρέφει κατά $\pi/2$. Τέσσερις στροφές κάνουν 2π , δηλαδή πλήρη κύκλο.

Το μέτρο δεν αλλάζει

$|i| = 1$, άρα ο πολλαπλασιασμός με i διατηρεί το μέτρο — κινούμαστε πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

κάθε τέσσερα βήματα επιστρέφουμε στο 1 — εξ ου και η περίοδος 4

Ο γενικός τύπος

Γράφουμε τον εκθέτη στη μορφή $4k + \lambda$ με λ το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 4. Επαγωγικά:

$$i^{4k+\lambda} = 1 \ (\lambda=0), \ i \ (\lambda=1), \ -1 \ (\lambda=2), \ -i \ (\lambda=3)$$

Παράδειγμα: i^{163}

1 Διαιρούμε τον εκθέτη με το 4

$$163 = 4 \cdot 40 + 3$$

2 Σπάμε τη δύναμη

$$i^{163} = (i^4)^{40} \cdot i^3$$

3 Το i^4 είναι 1

$$= 1^{40} \cdot i^3 = i^3 = -i$$

Ο κανόνας σε μία φράση

Κρατάμε μόνο το υπόλοιπο του εκθέτη modulo 4. Π.χ. i^{2026} : $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, άρα $i^{2026} = -1$.

2

Γεωμετρικός τόπος

Ποια σημεία z ικανοποιούν την εξίσωση;

Η εκφώνηση

$$z \cdot \bar{z} - (\varphi \bar{z} + \bar{\varphi} z) + r = 0$$

όπου $\varphi \in \mathbb{C}$ και $r \in \mathbb{R}$, με $r < |\varphi|^2$.

Η στρατηγική

Θέτουμε $z = x + yi$ και $\varphi = a + bi$ με $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, και μεταφράζουμε τα πάντα σε πραγματικές συντεταγμένες.

Τι περιμένουμε

Ο όρος $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ είναι τετραγωνικός και ο υπόλοιπος γραμμικός — μυρίζει εξίσωση κύκλου.

Κλειδί: $\varphi \bar{z} + \bar{\varphi} z$ είναι πάντα πραγματικός αριθμός

Βήμα 1 — ο γραμμικός όρος

Ο δεύτερος προσθετέος είναι συζυγής του πρώτου, άρα το άθροισμά τους είναι διπλάσιο του πραγματικού μέρους:

$$\varphi \bar{z} + \bar{\varphi} z = \varphi \bar{z} + (\varphi \bar{z})^- = 2 \operatorname{Re}(\varphi \bar{z})$$

Με $z = x + yi$ και $\varphi = a + bi$ υπολογίζουμε το γινόμενο:

$$\varphi \bar{z} = (a + bi)(x - yi) = (ax + by) + (bx - ay)i$$

$$\text{άρα } \varphi \bar{z} + \bar{\varphi} z = 2(ax + by)$$

Και φυσικά $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Βήμα 2 — συμπλήρωση τετραγώνων

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by) + r = 0$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = a^2 + b^2 - r$$

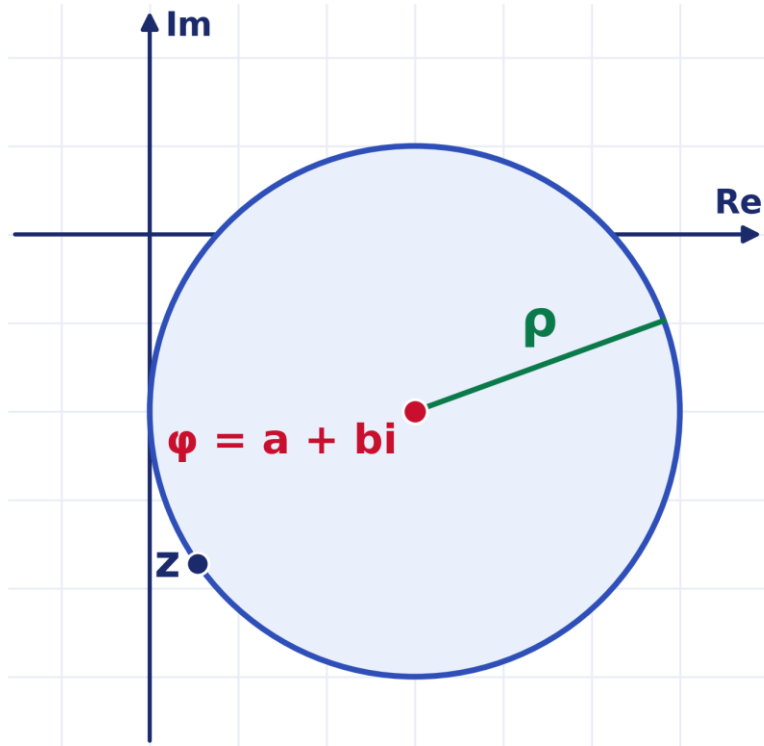
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - r$$

Γιατί χρειαζόμαστε τη συνθήκη $r < |\phi|^2$

Το δεξιό μέλος είναι $a^2 + b^2 - r = |\phi|^2 - r$. Για να είναι εξίσωση κύκλου πρέπει να είναι γνησίως θετικό — ακριβώς η υπόθεση $r < |\phi|^2$.

Το συμπέρασμα

Κύκλος με κέντρο φ και ακτίνα $\rho = \sqrt{|\varphi|^2 - r}$



εδώ $\varphi = 3 - 2i$ και $r = 4$: $|\varphi|^2 = 13$, $\rho = \sqrt{9} = 3$

κύκλος

Κέντρο

το σημείο (a, b) — δηλαδή ο ίδιος ο μιγαδικός φ

Ακτίνα

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2 - r} = \sqrt{|\varphi|^2 - r}$$

Έλεγχος με $\varphi = 3 - 2i$, $r = 4$: $\rho = \sqrt{13 - 4} = 3$.

Και αν δεν ισχύει η συνθήκη;

Η ίδια εξίσωση με διαφορετική σχέση ανάμεσα στο r και στο $|\phi|^2$ δίνει τρεις περιπτώσεις — αξίζει να τις δει κανείς μαζί.

$$r < |\phi|^2$$

Κύκλος

Κύκλος κέντρου ϕ και ακτίνας $\sqrt{|\phi|^2 - r}$

$$r = |\phi|^2$$

Σημείο

Ένα μόνο σημείο: $z = \phi$ (εκφυλισμένος κύκλος ακτίνας 0)

$$r > |\phi|^2$$

Κενό σύνολο

Κενό σύνολο — καμία λύση στο $\mathbb{C}$

3

Η εξίσωση $z^6 = 64$

Πολική μορφή και τύπος De Moivre

Βήμα 1 — πολική μορφή του δεξιού μέλους

Ο αριθμός 64 είναι πραγματικός και θετικός, άρα βρίσκεται πάνω στον θετικό ημιάξονα: μέτρο 64 και όρισμα 0.

$$64 = 2^6 (\cos 0 + i \sin 0)$$

Το 2^6 το γράφουμε έτσι ώστε η έκτη ρίζα του μέτρου να βγαίνει αμέσως:

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

Προσοχή στο όρισμα

Το όρισμα δεν είναι μόνο 0 αλλά $2n\pi$ για κάθε ακέραιο n . Αυτή ακριβώς η πολλαπλότητα παράγει τις έξι διαφορετικές ρίζες — αν ξεχάσουμε το $2n\pi$, βρίσκουμε μόνο μία.

Βήμα 2 — ο τύπος των ριζών

$$z_k = \sqrt[6]{2^6} \cdot [\cos(2k\pi/6) + i \sin(2k\pi/6)], \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

Αναλυτικά:

$$z_0 = 2 (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$z_1 = 2 (\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$$

$$z_2 = 2 (\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)$$

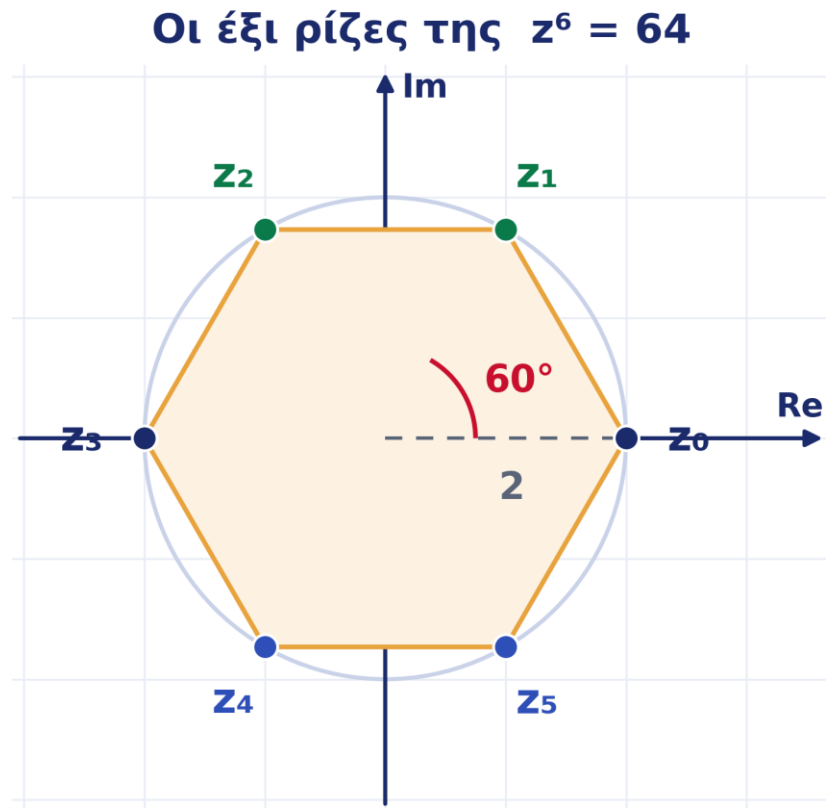
$$z_3 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$z_4 = 2 (\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3)$$

$$z_5 = 2 (\cos 5\pi/3 + i \sin 5\pi/3)$$

Σε καρτεσιανή μορφή: $2, 1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -2, -1 - \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$

Γεωμετρικά: κανονικό εξάγωνο



κανονικό εξάγωνο σε κύκλο ακτίνας 2 · z_1 , z_5 και z_2 , z_4 συζυγή ζεύγη

Ίδιο μέτρο

Και οι έξι ρίζες έχουν μέτρο 2 — βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.

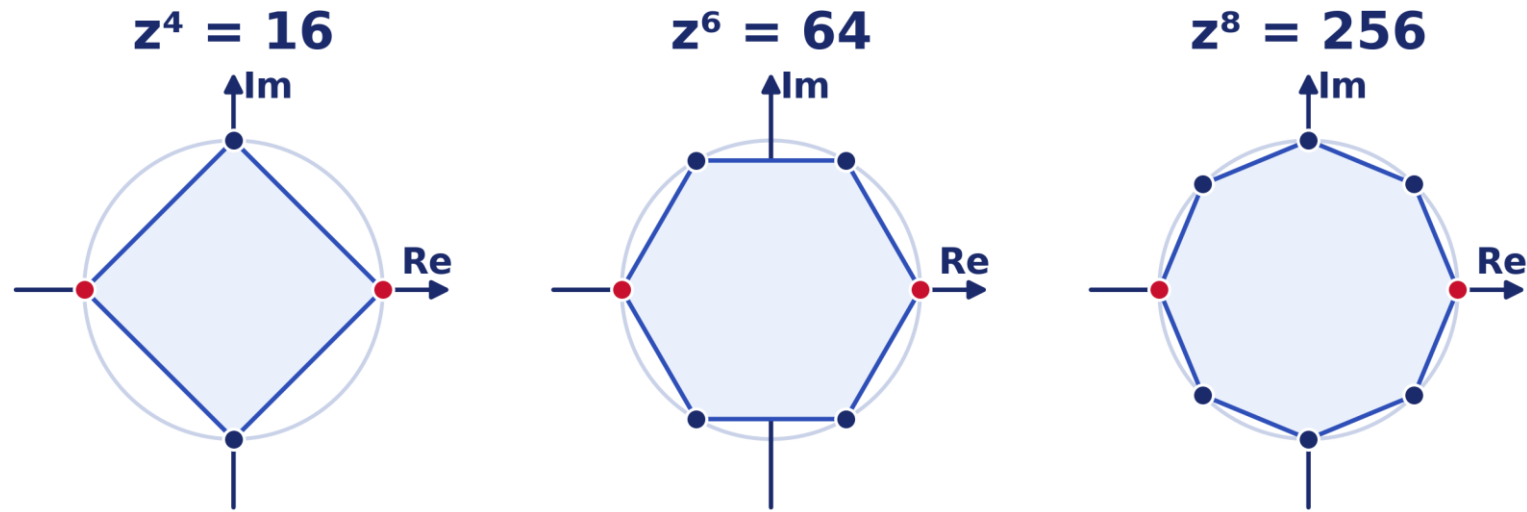
Ισαπέχοντα ορίσματα

Διαδοχικές ρίζες διαφέρουν κατά $2\pi/6 = 60^\circ$, άρα σχηματίζουν κανονικό εξάγωνο.

Συζυγή ζεύγη

z_1 με z_5 και z_2 με z_4 — όπως επιβάλλει η άσκηση 5, αφού οι συντελεστές είναι πραγματικοί.

Η ίδια εικόνα για κάθε $z^n = c^n$



n άρτιος $\Rightarrow$ πάντα δύο πραγματικές ρίζες (± 2) — τα κόκκινα σημεία

Ο γενικός κανόνας

Οι n ρίζες ενός θετικού πραγματικού αριθμού είναι οι κορυφές κανονικού n -γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{c}$.

Πόσες πραγματικές;

Για n άρτιο δύο ($\pm \sqrt[n]{c}$), για n περιττό μόνο μία. Οι υπόλοιπες έρχονται σε συζυγή ζεύγη.

4

Η εξίσωση $z^{12} + 2z^6 + 2 = 0$

Αντικατάσταση, τριώνυμο, και δώδεκα ρίζες

Βήμα 1 — αντικατάσταση

Παρατηρούμε ότι $z^{12} = (z^6)^2$, άρα η εξίσωση είναι διτετράγωνη ως προς z^6 .

$$(z^6)^2 + 2z^6 + 2 = 0$$

$$\text{θέτουμε } w = z^6 \Rightarrow w^2 + 2w + 2 = 0$$

Λύνουμε το τριώνυμο με τη γνωστή διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow \text{μιγαδικές ρίζες}$$

Βήμα 2 — οι δύο τιμές του w

$$w_{1,2} = (-2 \pm i\sqrt{4}) / 2 = -1 \pm i$$

Η αρχική εξίσωση σπάει επομένως σε δύο εξισώσεις έκτου βαθμού:

$$(1) \quad z^6 = -1 + i$$

$$(2) \quad z^6 = -1 - i$$

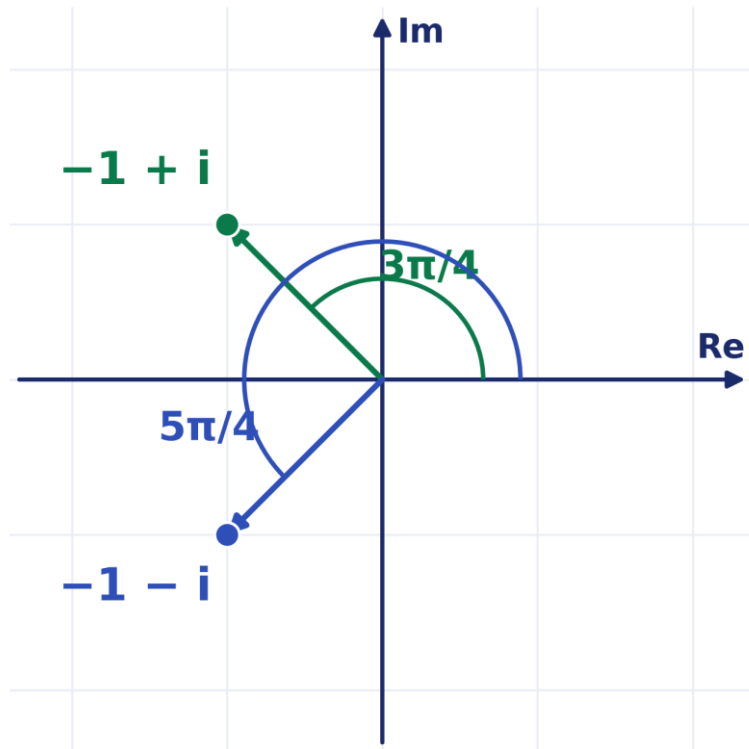
Η δομή της λύσης

Κάθε μία από τις δύο εξισώσεις έχει έξι ρίζες, άρα συνολικά 12 — όσος και ο βαθμός της αρχικής εξίσωσης, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας.

Παρατηρήστε επίσης ότι τα w_1, w_2 είναι συζυγή: αναμενόμενο, αφού το τριώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές.

Βήμα 3 — πολική μορφή των $-1 \pm i$

Οι δύο λύσεις του $w^2 + 2w + 2 = 0$



και οι δύο έχουν μέτρο $\sqrt{2}$ — είναι συζυγείς μεταξύ τους

$$|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Το όρισμα κατά τεταρτημόριο

Το $-1 + i$ είναι στο 2ο τεταρτημόριο. Από $\cot \theta = 1/(-1) = -1$ και $x < 0, y > 0$ προκύπτει $\theta_1 = 3\pi/4$.

Το συζυγές

Το $-1 - i$ είναι στο 3ο τεταρτημόριο, με $\theta_2 = 5\pi/4$ (ισοδύναμα $-3\pi/4$).

Προσοχή: η αριθμομηχανή δίνει το $\arctan(-1) = -\pi/4$ — το τεταρτημόριο το κρίνουμε εμείς.

Βήμα 4 — οι δώδεκα ρίζες

Εφαρμόζουμε τον τύπο των n -οστών ριζών χωριστά σε κάθε μία από τις δύο εξισώσεις.

από την (1) $z^6 = -1 + i$:

$$z_k = \sqrt[6]{\sqrt{2}} \cdot [\cos (2k\pi + 3\pi/4) / 6 + i \sin (2k\pi + 3\pi/4) / 6], \quad k = 0, \dots, 5$$

από την (2) $z^6 = -1 - i$:

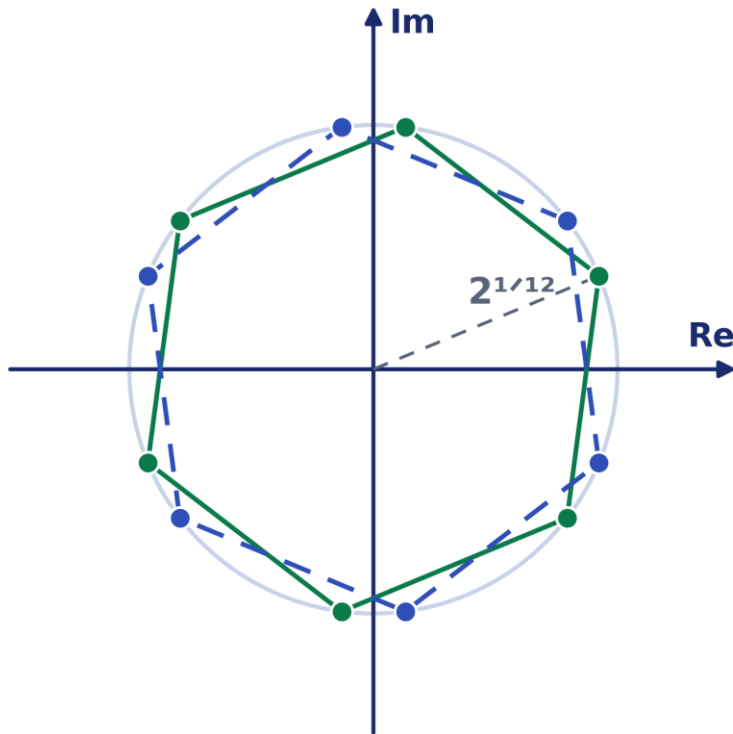
$$z'_k = \sqrt[6]{\sqrt{2}} \cdot [\cos (2k\pi + 5\pi/4) / 6 + i \sin (2k\pi + 5\pi/4) / 6], \quad k = 0, \dots, 5$$

$$\text{κοινό μέτρο: } \sqrt[6]{\sqrt{2}} = (2^{1/2})^{1/6} = 2^{1/12} \approx 1,0595$$

Και οι δώδεκα ρίζες έχουν το ίδιο μέτρο — αφού και τα δύο w έχουν μέτρο $\sqrt{2}$, βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.

Η εικόνα των δώδεκα ριζών

Οι δώδεκα ρίζες της $z^{12} + 2z^6 + 2 = 0$



Δύο εξάγωνα

Οι ρίζες της (1) δίνουν ένα κανονικό εξάγωνο (πράσινο) και της (2) ένα δεύτερο (μπλε), στον ίδιο κύκλο ακτίνας $2^{1/12}$.

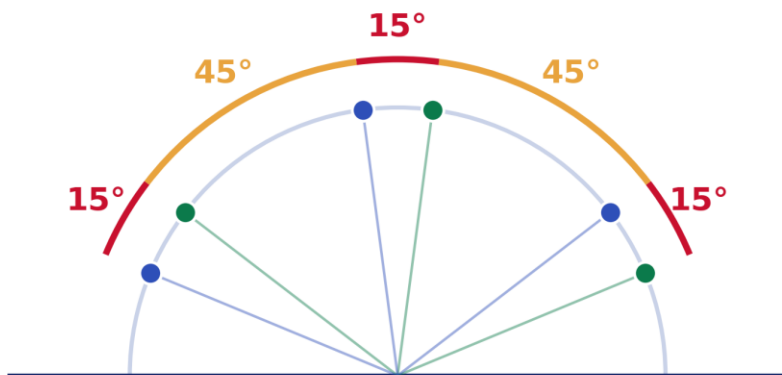
Η σχετική στροφή

Τα ορίσματα διαφέρουν κατά $(5\pi/4 - 3\pi/4)/6 = \pi/12$, δηλαδή 15° : το δεύτερο εξάγωνο είναι στραμμένο κατά 15° ως προς το πρώτο.

δύο κανονικά εξάγωνα στον ίδιο κύκλο, στραμμένα κατά 15° το ένα ως προς το άλλο

Μια λεπτομέρεια που αξίζει προσοχή

Οι γωνιακές αποστάσεις εναλλάσσονται



$15^\circ - 45^\circ - 15^\circ - 45^\circ \dots$ (πάνω ημιεπίπεδο) · άρα ΔΕΝ είναι κανονικό δωδεκάγωνο

Τα ορίσματα: $22,5^\circ \cdot 37,5^\circ \cdot 82,5^\circ \cdot 97,5^\circ \cdot 142,5^\circ \cdot 157,5^\circ \dots$ (ανά 60° σε κάθε εξαγώνο)

Δεν είναι κανονικό δωδεκάγωνο

Σε ένα κανονικό δωδεκάγωνο οι γωνίες θα διέφεραν κατά 30° . Εδώ τα κενά εναλλάσσονται 15° και 45° .

Γιατί

Κανονικό δωδεκάγωνο θα είχαμε αν τα δώδεκα σημεία ήταν οι ρίζες μίας εξίσωσης $z^{12} = c$. Εδώ όμως έχουμε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις έκτου βαθμού.

5

Συζυγείς ρίζες

Πραγματικοί συντελεστές $\Rightarrow$ οι μιγαδικές ρίζες σε ζεύγη

Η πρόταση

Εκφώνηση

Αν η εξίσωση $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, με όλους τους συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_n$ πραγματικούς, έχει ρίζα τον μιγαδικό ϕ , τότε έχει ρίζα και τον συζυγή $\bar{\phi}$.

Οι ιδιότητες του συζυγούς που θα χρειαστούμε:

$$(z_1 + z_2)^- = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(z_1 \cdot z_2)^- = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a} = a$$

Οι τρεις αυτές ιδιότητες είναι όλη η απόδειξη

Η πρώτη λέει ότι η συζυγία «περνάει μέσα» από αθροίσματα, η δεύτερη ότι περνάει μέσα από γινόμενα — άρα και από δυνάμεις — και η τρίτη ότι αφήνει ανέπαφους τους πραγματικούς συντελεστές. Εκεί ακριβώς χρησιμοποιείται η υπόθεση.

Η απόδειξη σε τρία βήματα

1

Ο φ είναι ρίζα, άρα ισχύει η ισότητα

$$a_n \varphi^n + a_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + a_1 \varphi + a_0 = 0$$

2

Παίρνουμε συζυγή και στα δύο μέλη — ο συζυγής του 0 είναι 0

$$(a_n \varphi^n + a_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + a_1 \varphi + a_0)^- = 0$$

3

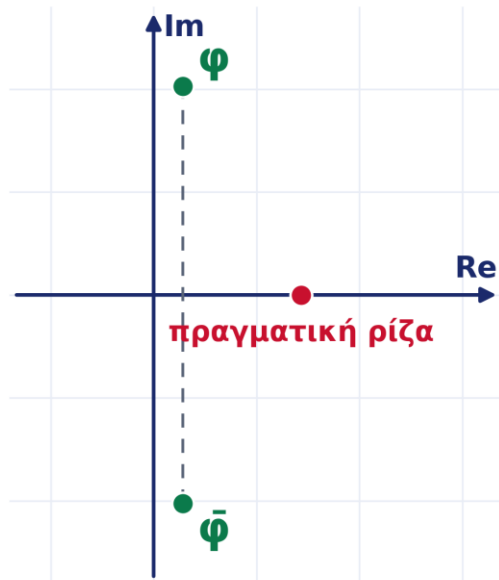
Η συζυγία περνάει μέσα· οι πραγματικοί συντελεστές μένουν ίδιοι

$$a_n (\bar{\varphi})^n + a_{n-1} (\bar{\varphi})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\varphi} + a_0 = 0$$

δηλαδή ο $\bar{\varphi}$ επαληθεύει την εξίσωση — είναι ρίζα.

Τι σημαίνει αυτό στην πράξη

Ρίζες του $z^3 - 2z^2 + 5z - 6$ (πραγματικοί συντελεστές)



οι μη πραγματικές ρίζες έρχονται σε συζυγή ζεύγη, συμμετρικά ως προς τον άξονα Re

Επιστροφή στην άσκηση 3: οι ρίζες της $z^6 = 64$ ήταν z_1 με z_5 και z_2 με z_4 συζυγείς — ακριβώς αυτό.

Συμμετρία

Οι μη πραγματικές ρίζες είναι συμμετρικές ως προς τον πραγματικό άξονα.

Άρτιο πλήθος

Οι μιγαδικές ρίζες είναι πάντα άρτιου πλήθους — έρχονται σε ζεύγη.

Περισσότερος βαθμός

Πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Τι κρατάμε από κάθε άσκηση

1

Περιοδικότητα

Οι δυνάμεις του i εξαρτώνται μόνο από το υπόλοιπο του εκθέτη modulo 4.

2

Μετάφραση

Μιγαδική εξίσωση $\rightarrow$ πραγματικές συντεταγμένες $\rightarrow$ γνωστό γεωμετρικό σχήμα.

3

Πολική μορφή

Οι n -οστές ρίζες είναι πάντα κορυφές κανονικού πολυγώνου.

4

Αντικατάσταση

Μια εξίσωση βαθμού 12 ανάγεται σε τριώνυμο συν δύο εξισώσεις βαθμού 6.

5

Συμμετρία

Πραγματικοί συντελεστές $\Rightarrow$ οι μιγαδικές ρίζες σε συζυγή ζεύγη.

Υπενθύμιση συμβολισμού

Στα ελληνικά συγγράμματα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις γράφονται διαφορετικά από ό,τι στις αριθμομηχανές.

συν θ

$\cos \theta$

ημ θ

$\sin \theta$

εφ θ

$\tan \theta$

τοξσυν x

$\cos^{-1} x$ (arccos)

τοξημ x

$\sin^{-1} x$ (arcsin)

τοξεφ x

$\tan^{-1} x$ (arctan)

Και ένα σύνηθες λάθος

Το τοξεφ δίνει τιμές στο $(-\pi/2, \pi/2)$, άρα ποτέ δεν φτάνει στο 2ο ή στο 3ο τεταρτημόριο. Το όρισμα ενός μιγαδικού το καθορίζουμε πάντα κοιτώντας τα πρόσημα του x και του y .