

Μαθηματικός Λογισμός Ι - 2η Διάλεξη

Μιγαδικοί αριθμοί

Συμπληρωματικό υλικό εκτός της εξεταστέας ύλης

Στην πρώτη διάλεξη μελετήσαμε τους πραγματικούς αριθμούς ως πλήρες διατεταγμένο σώμα. Τώρα διευρύνουμε το αριθμητικό μας σύστημα, ώστε να μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις που δεν έχουν λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς. Η διάλεξη αποτελεί συμπλήρωμα του μαθήματος και, σύμφωνα με τον χαρακτήρα που της δίνουμε εδώ, δεν εντάσσεται στην εξεταστέα ύλη.

Γιατί χρειαζόμαστε νέους αριθμούς

Για κάθε πραγματικό x το τετράγωνό του είναι μη αρνητικό. Επομένως η ακόλουθη εξίσωση δεν έχει πραγματική λύση:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Εισάγουμε τη φανταστική μονάδα i , με καθοριστική ιδιότητα:

$$i^2 = -1.$$

Ο όρος «φανταστικός» είναι ιστορικός. Οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν ακριβείς ορισμούς και κανόνες πράξεων, όπως οι πραγματικοί. Θα δούμε ότι μπορούν να παριστάνονται ως σημεία ενός επιπέδου.

Ορισμός και συμβολισμός

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

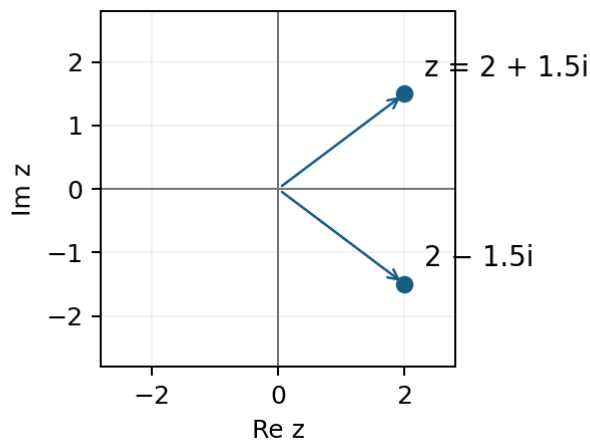
Η γραφή $z = x + yi$ είναι μοναδική. Οι πραγματικοί αριθμοί ενσωματώνονται στους μιγαδικούς με την ταύτιση $x = x + 0i$, οπότε $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Ορίζουμε:

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

Προσοχή: το φανταστικό μέρος είναι ο πραγματικός αριθμός y , όχι ο όρος yi . Για παράδειγμα, αν $z = 3 - 2i$, τότε $\operatorname{Re}(z) = 3$ και $\operatorname{Im}(z) = -2$.

1 Το μιγαδικό επίπεδο

Στον μιγαδικό αριθμό $z=x+yi$ αντιστοιχίζουμε το σημείο (x,y) του επιπέδου. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο πραγματικός και ο κατακόρυφος ο φανταστικός. Μπορούμε επίσης να βλέπουμε τον z ως διάνυσμα από την αρχή των αξόνων προς το σημείο αυτό.



Σχήμα 1 Ένας μιγαδικός και ο συζυγής του είναι συμμετρικοί ως προς τον πραγματικό άξονα.

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

$$x_1 + y_1i = x_2 + y_2i \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2.$$

Η ισότητα δύο μιγαδικών μεταφράζεται σε δύο πραγματικές ισότητες. Έτσι μπορούμε να προσδιορίζουμε άγνωστα πραγματικά και φανταστικά μέρη.

Σύνδεση με την πρώτη διάλεξη

Οι μιγαδικοί αποτελούν σώμα: μπορούμε να προσθέτουμε, να αφαιρούμε, να πολλαπλασιάζουμε και να διαιρούμε με κάθε μη μηδενικό αριθμό. Δεν αποτελούν όμως διατεταγμένο σώμα. Δεν υπάρχει ολική διάταξη συμβατή με τις πράξεις τους με τον τρόπο που γνωρίσαμε στους πραγματικούς.

Πράγματι, σε κάθε διατεταγμένο σώμα το τετράγωνο ενός μη μηδενικού στοιχείου είναι θετικό. Εδώ όμως $i^2 = -1$. Αν υπήρχε τέτοια διάταξη, θα είχαμε συγχρόνως $1 > 0$ και $-1 > 0$, πράγμα αδύνατο.

Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τα μέτρα δύο μιγαδικών. Τα μέτρα τους είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Η σύγκριση αυτή αφορά αποστάσεις, όχι μια διάταξη σώματος πάνω στο $\mathbb{C}$.

2 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$. Στην πρόσθεση και την αφαίρεση συνδυάζουμε χωριστά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Στον πολλαπλασιασμό εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα και έπειτα αντικαθιστούμε το i^2 με -1 :

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$$

Ο συζυγής

Ο συζυγής του $z = x + yi$ είναι ο αριθμός που έχει το ίδιο πραγματικό και το αντίθετο φανταστικό μέρος:

$$\bar{z} = x - yi.$$

Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού με τον συζυγή του δίνει πραγματικό αποτέλεσμα:

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Η διαίρεση

Για $z_2 \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, επειδή $z_2 \neq 0$ σημαίνει ότι τα x_2 και y_2 δεν είναι συγχρόνως μηδέν.

Παράδειγμα πράξεων

$$(1 + 2i)(3 - i) = 5 + 5i.$$

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

3 Μέτρο και απόσταση

Το μέτρο ενός μιγαδικού $z=x+yi$ είναι η απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Το μέτρο είναι μη αρνητικό και ισούται με μηδέν ακριβώς όταν $z=0$. Η απόσταση δύο σημείων του μιγαδικού επιπέδου δίνεται από το μέτρο της διαφοράς τους:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Μια βασική ταυτότητα και η απόδειξή της

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Πράγματι, αναπτύσσοντας το γινόμενο παίρνουμε:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Για παράδειγμα:

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Χρήσιμες ιδιότητες

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Η τελευταία είναι η τριγωνική ανισότητα: η άμεση απόσταση δεν υπερβαίνει το άθροισμα των δύο διαδοχικών αποστάσεων. Για την ιδιότητα του γινομένου, χρησιμοποιούμε ότι ο συζυγής ενός γινομένου ισούται με το γινόμενο των συζυγών:

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Παίρνοντας τις μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. Επίσης, αν $z_2 \neq 0$, τότε $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

Παράδειγμα απόστασης

$$|(1 + i) - (4 + 5i)| = |-3 - 4i| = 5.$$

4 Πολική μορφή και όρισμα

Για $z \neq 0$ θέτουμε $\rho = |z| > 0$ και επιλέγουμε μια γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα του z με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Τότε:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Αυτή είναι η πολική ή τριγωνομετρική μορφή. Η γωνία θ λέγεται όρισμα του z . Δεν είναι μοναδική: οι γωνίες $\theta + 2k\pi$, με k ακέραιο, δίνουν τον ίδιο μιγαδικό.

Πώς βρίσκουμε τη γωνία

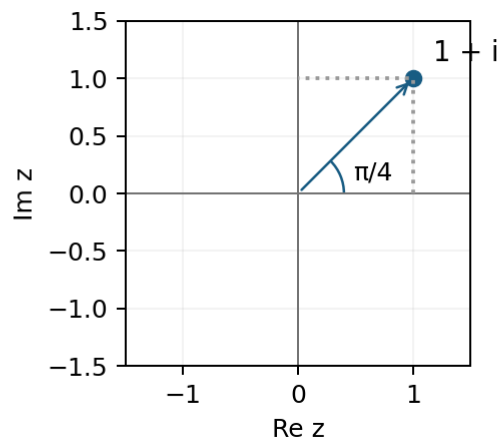
Δεν αρκεί να γράψουμε $\theta = \arctan(y/x)$. Η εφαπτομένη έχει περίοδο π , οπότε ο λόγος y/x δεν ξεχωρίζει αντίθετα τεταρτημόρια. Πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τα πρόσημα των x και y . Όταν $x=0$ χρησιμοποιούμε απευθείας τη θέση πάνω στον φανταστικό άξονα.

Αν επιλέξουμε την κύρια γωνία στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, τότε για $x > 0$ έχουμε $\theta = \arctan(y/x)$. Για $x < 0$ προσθέτουμε π όταν $y \geq 0$ και αφαιρούμε π όταν $y < 0$. Για $x=0$ παίρνουμε $\pi/2$ όταν $y > 0$ και $-\pi/2$ όταν $y < 0$. Ο μηδενικός αριθμός δεν έχει όρισμα.

Παράδειγμα από τις σημειώσεις

$$z = 1 + i, \quad \rho = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$



Σχήμα 2 Οι συντεταγμένες είναι $(1,1)$, το μέτρο $\sqrt{2}$ και η γωνία $\pi/4$.

Για τον αριθμό $-1-i$ ο λόγος y/x είναι επίσης 1, αλλά το σημείο ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο. Ένα όρισμά του είναι $5\pi/4$ και το κύριο όρισμά του είναι $-3\pi/4$.

5 Δυνάμεις και μιγαδικές ρίζες

Ο τύπος του De Moivre

Ο πολλαπλασιασμός σε πολική μορφή πολλαπλασιάζει τα μέτρα και προσθέτει τις γωνίες. Αυτό προκύπτει αναπτύσσοντας το γινόμενο και εφαρμόζοντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες πρόσθεσης:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Επαναλαμβάνοντας τον πολλαπλασιασμό, για κάθε θετικό ακέραιο n παίρνουμε τον τύπο του De Moivre:

$$[\rho(\cos\theta + i \sin\theta)]^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Όλες οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = a$

Έστω $a \neq 0$ και n θετικός ακέραιος. Γράφουμε $a = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, όπου $r = |a|$. Αν $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ο τύπος του De Moivre δίνει δύο συνθήκες:

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

Άρα οι n διαφορετικές λύσεις είναι:

$$z_k = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Όλες έχουν μέτρο $r^{1/n}$. Οι διαδοχικές γωνίες διαφέρουν κατά $2\pi/n$, άρα οι ρίζες βρίσκονται σε ίσες γωνιακές αποστάσεις πάνω σε έναν κύκλο. Για $n \geq 3$ είναι κορυφές κανονικού n γώνου. Διαφορετική επιλογή ορίσματος του a αλλάζει μόνο την αρίθμηση των ίδιων ριζών.

Αν $a=0$, η μοναδική διαφορετική λύση είναι $z=0$. Ως ρίζα του πολυνύμου z^n έχει πολλαπλότητα n . Δεν έχουμε n διαφορετικές λύσεις σε αυτή την περίπτωση.

Γενικότερα, το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας δηλώνει ότι κάθε μη σταθερό πολυνύμο βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$, όταν μετράμε τις πολλαπλότητές τους. Το θεώρημα αυτό αναφέρεται εδώ χωρίς απόδειξη.

Προσοχή στις τετραγωνικές ρίζες

Το σύμβολο $\sqrt{r}$ για $r \geq 0$ δηλώνει τη μη αρνητική πραγματική ρίζα. Στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2 = a$, για $a \neq 0$, έχει δύο αντίθετες λύσεις. Δεν εφαρμόζουμε μηχανικά στους μιγαδικούς κάθε κανόνα που χρησιμοποιούμε για πραγματικές τετραγωνικές ρίζες.

6 Παραδείγματα εξισώσεων

Δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα

Για πραγματικούς συντελεστές α, β, γ , με $\alpha \neq 0$, και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, οι λύσεις είναι:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}.$$

Στο παράδειγμα των σημειώσεων:

$$z^2 + z + 1 = 0, \quad \Delta = 1 - 4 = -3.$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

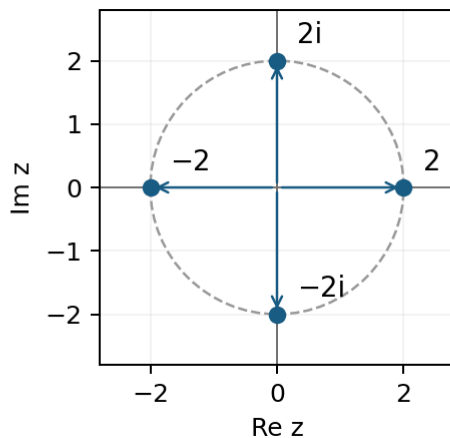
Οι ρίζες είναι συζυγείς. Έχουν άθροισμα -1 και γινόμενο 1 , όπως προβλέπουν οι σχέσεις των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Οι τέσσερις ρίζες της εξίσωσης $z^4=16$

Στους πραγματικούς βρίσκουμε δύο λύσεις, τις 2 και -2 . Για να βρούμε όλες τις μιγαδικές λύσεις, γράφουμε το 16 σε πολική μορφή με μέτρο 16 και όρισμα 0 :

$$z_k = 2\left(\cos \frac{k\pi}{2} + i\sin \frac{k\pi}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -2i.$$



Σχήμα 3 Οι τέσσερις ρίζες βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα 2 .

Κάθε μία, υψωμένη στην τέταρτη δύναμη, δίνει 16 . Έτσι ελέγχουμε ότι οι τιμές που βρήκαμε πράγματι λύνουν την εξίσωση.

7 Το τελικό παράδειγμα και η ανακεφαλαίωση

Οι λύσεις της εξίσωσης $z^4=4-3i$

Το τελευταίο παράδειγμα των χειρόγραφων σημειώσεων ολοκληρώνεται με την ίδια μέθοδο. Υπολογίζουμε πρώτα το μέτρο και επιλέγουμε όρισμα στο τέταρτο τεταρτημόριο:

$$|4 - 3i| = 5, \quad \theta = -\arctan \frac{3}{4}.$$

Επομένως όλες οι λύσεις γράφονται:

$$z_k = 5^{1/4} \left(\cos \frac{-\arctan(3/4) + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{-\arctan(3/4) + 2k\pi}{4} \right),$$
$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Μπορούμε να δώσουμε και ακριβή καρτεσιανή μορφή. Θέτουμε:

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 3/\sqrt{2}}{2}}, \quad v = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3/\sqrt{2}}{2}}.$$

Τότε μια ρίζα είναι $w=u-vi$ και οι άλλες προκύπτουν πολλαπλασιάζοντάς την διαδοχικά με i :

$$w = u - vi, \quad iw = v + ui, \quad -w = -u + vi, \quad -iw = -v - ui.$$

Για έλεγχο παρατηρούμε ότι $u^2 - v^2 = 3/\sqrt{2}$ και $2uv = 1/\sqrt{2}$. Συνεπώς:

$$w^2 = \frac{3-i}{\sqrt{2}}, \quad w^4 = \frac{(3-i)^2}{2} = 4 - 3i.$$

Τι κρατάμε από τη διάλεξη

Η καρτεσιανή μορφή εξυπηρετεί την πρόσθεση, την αφαίρεση και τις αλγεβρικές πράξεις. Ο συζυγής μετατρέπει τον παρονομαστή μιας διαίρεσης σε πραγματικό αριθμό. Το μέτρο εκφράζει απόσταση. Η πολική μορφή κάνει απλές τις δυνάμεις και αποκαλύπτει τη γεωμετρία των ριζών.

Η σύνδεση με τη μαθηματική αυστηρότητα της πρώτης διάλεξης είναι συγκεκριμένη: κάθε κανόνας έχει προϋποθέσεις. Δεν διαιρούμε με μηδέν, δεν αποδίδουμε όρισμα στο μηδέν, επιλέγουμε σωστά το τεταρτημόριο και ξεχωρίζουμε το πλήθος των διαφορετικών ριζών από την πολλαπλότητά τους.

Προαιρετικές ερωτήσεις κατανόησης

1. Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $(2-i)/(1+i)$.
2. Γράψτε το $-\sqrt{3}+i$ σε πολική μορφή.
3. Βρείτε όλες τις λύσεις της $z^3=8$ και παραστήστε τις στο μιγαδικό επίπεδο.
4. Εξηγήστε γιατί το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Σύντομες υποδείξεις για τις ασκήσεις

1. Πραγματικό και φανταστικό μέρος

Πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή $1-i$ του παρονομαστή. Χρησιμοποιήστε ότι $(1+i)(1-i)=2$ και $i^2=-1$. Θα βρείτε $(2-i)/(1+i)=1/2-(3/2)i$, οπότε το πραγματικό μέρος είναι $1/2$ και το φανταστικό μέρος $-3/2$.

2. Πολική μορφή

Υπολογίστε πρώτα το μέτρο: $|\sqrt{3}+i|=2$. Το σημείο βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο, με συνημίτονο $-\sqrt{3}/2$ και ημίτονο $1/2$. Επιλέξτε λοιπόν $\theta=5\pi/6$ και γράψτε $z=2(\cos(5\pi/6)+i \sin(5\pi/6))$.

3. Οι κυβικές ρίζες του 8

Γράψτε $8=8(\cos 0+i \sin 0)$ και εφαρμόστε τον τύπο των κυβικών ριζών. Οι λύσεις έχουν μέτρο 2 και ορίσματα $0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Σε καρτεσιανή μορφή είναι $2, -1+i\sqrt{3}$ και $-1-i\sqrt{3}$. Στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα 2.

4. Γιατί το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα

Σε κάθε διατεταγμένο σώμα το τετράγωνο κάθε μη μηδενικού στοιχείου είναι θετικό. Αν υπήρχε διάταξη στο $\mathbb{C}$ συμβατή με τις πράξεις του σώματος, θα είχαμε $i^2>0$, δηλαδή $-1>0$. Όμως και $1=1^2>0$, άρα, προσθέτοντας, θα προέκυπτε $0>0$. Η αντίφαση αποκλείει μια τέτοια διάταξη.