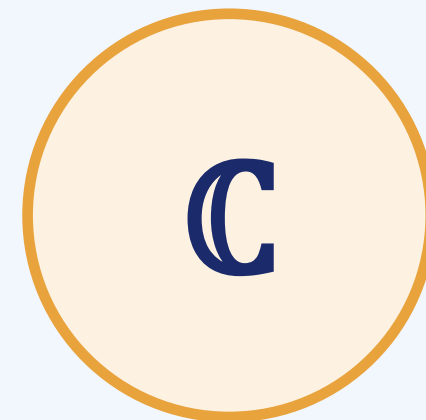


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

2η Διάλεξη

Μιγαδικοί αριθμοί

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών · Τμήμα Στατιστικής



Συμπληρωματικό υλικό

Η διάλεξη αποτελεί συμπλήρωμα του μαθήματος και δεν εντάσσεται στην εξεταστέα ύλη.

Πού φτάσαμε

Στην 1η διάλεξη μελετήσαμε το $\mathbb{R}$ ως πλήρες διατεταγμένο σώμα: πράξεις, διάταξη, πληρότητα.

Πού πάμε

Διευρύνουμε το αριθμητικό σύστημα ώστε να λύνονται εξισώσεις χωρίς πραγματική λύση.

Θα δούμε τι κερδίζουμε — και τι χάνουμε.

Γιατί χρειαζόμαστε νέους αριθμούς

Για κάθε πραγματικό x το τετράγωνό του είναι μη αρνητικό. Επομένως:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{δεν έχει πραγματική λύση}$$

Εισάγουμε τη φανταστική μονάδα i , με καθοριστική ιδιότητα:

$$i^2 = -1$$

Ο όρος «φανταστικός» είναι ιστορικός

Οι μιγαδικοί έχουν ακριβείς ορισμούς και κανόνες πράξεων, όπως οι πραγματικοί — και παριστάνονται ως σημεία ενός επιπέδου.

Ορισμός και συμβολισμός

$$\mathbb{C} = \{ x + y i : x, y \in \mathbb{R} \}$$

Μοναδική γραφή

Η γραφή $z = x + y i$
είναι μοναδική.

Το $\mathbb{R}$ μέσα στο $\mathbb{C}$

$x = x + 0 i$,
άρα $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Μέρη

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

Προσοχή: το φανταστικό μέρος είναι ο πραγματικός αριθμός y , όχι ο όρος $y i$

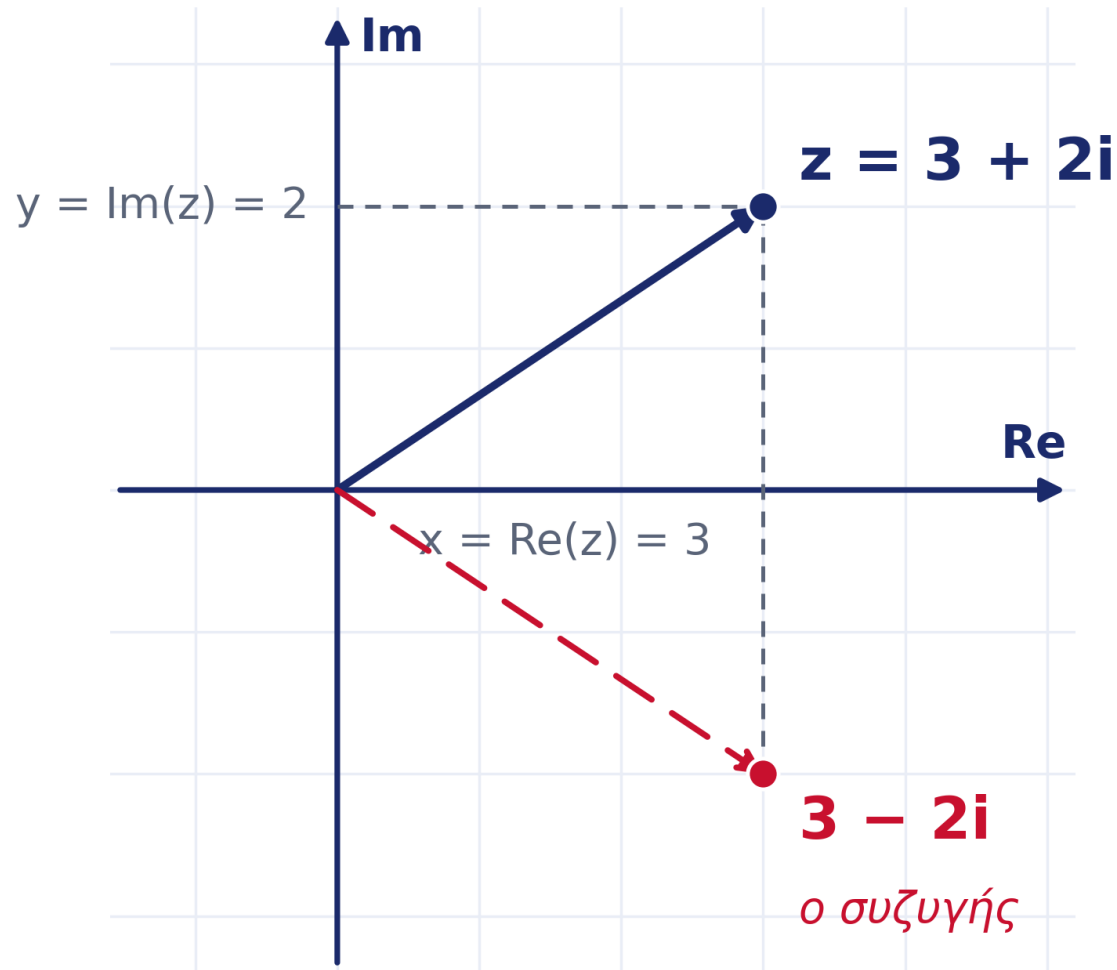
Αν $z = 3 - 2i$, τότε $\operatorname{Re}(z) = 3$ και $\operatorname{Im}(z) = -2$.

1

Το μιγαδικό επίπεδο

Κάθε μιγαδικός είναι σημείο — ή διάνυσμα — του επιπέδου

Ο μιγαδικός ως σημείο του επιπέδου



Αντιστοίχιση

$z = x + y i \leftrightarrow$ σημείο (x, y)

Οριζόντιος: πραγματικός άξονας

Κατακόρυφος: φανταστικός

Ο συζυγής

$$\bar{z} = x - y i$$

συμμετρικός ως προς τον
πραγματικό άξονα

Ως διάνυσμα

από την αρχή των αξόνων προς
το σημείο

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \iff x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

Μία μιγαδική $\rightarrow$ δύο πραγματικές

Κάθε εξίσωση μεταξύ μιγαδικών
ισοδυναμεί με δύο εξισώσεις
πραγματικών αριθμών.

Γιατί είναι χρήσιμο

Έτσι προσδιορίζουμε άγνωστα
πραγματικά και φανταστικά μέρη.

$$\text{Παράδειγμα: } a + b i = 5 - 2 i \implies a = 5, b = -2$$

Σώμα, αλλά όχι διατεταγμένο σώμα

✓ Σώμα

Προσθέτουμε, αφαιρούμε, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με κάθε μη μηδενικό αριθμό.

✗ Όχι διατεταγμένο

Δεν υπάρχει ολική διάταξη συμβατή με τις πράξεις, όπως στους πραγματικούς.

**Σε κάθε
διατεταγμένο σώμα**

το τετράγωνο κάθε
μη μηδενικού στοιχείου
είναι θετικό

Όμως εδώ

$$i^2 = -1$$

Άρα θα είχαμε

$$1 > 0 \quad \text{και} \quad -1 > 0$$

αδύνατο → δεν υπάρχει ολική διάταξη συμβατή με τις πράξεις του $\mathbb{C}$

Τι σημαίνει αυτό στην πράξη

Δεν γράφουμε $z_1 < z_2$

Η σύγκριση δύο μιγαδικών αριθμών ως προς μέγεθος δεν έχει νόημα. Δεν υπάρχουν «θετικοί» και «αρνητικοί» μιγαδικοί.

Γράφουμε $|z_1| < |z_2|$

Τα μέτρα είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και συγκρίνονται ελεύθερα. Η σύγκριση αφορά αποστάσεις.

Η απουσία διάταξης στο $\mathbb{C}$ δεν εμποδίζει τη σύγκριση αποστάσεων στο $\mathbb{R}$

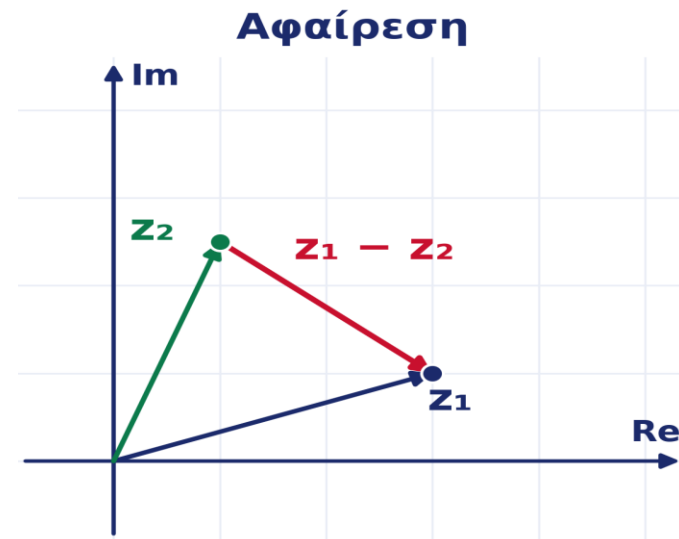
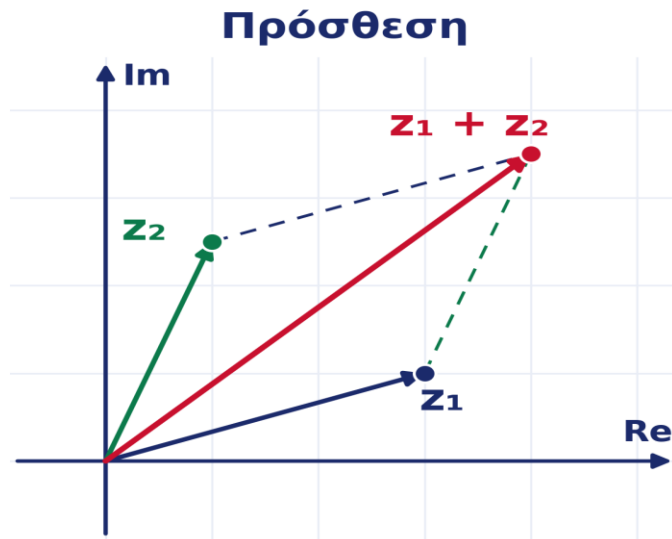
*Το ίδιο θα κάνουμε και με τα όρια:
οι ανισότητες θα αφορούν πάντα μέτρα, ποτέ τους ίδιους τους μιγαδικούς.*

2

Πράξεις με μιγαδικούς

Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, συζυγής, διαίρεση

Πρόσθεση και αφαίρεση — γεωμετρικά



Το μήκος του κόκκινου διανύσματος είναι η απόσταση $|z_1 - z_2|$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$$

Συνδυάζουμε χωριστά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη.

Πολλαπλασιασμός και συζυγής

Επιμεριστική ιδιότητα, και έπειτα αντικαθιστούμε το i^2 με -1 :

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

Ο συζυγής

$$\bar{z} = x - y i$$

ίδιο πραγματικό, αντίθετο φανταστικό μέρος

Η κρίσιμη ιδιότητα

$$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$$

το γινόμενο είναι ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ

Αυτό ακριβώς κάνει δυνατή τη διαίρεση

Η διαίρεση — το τέχνασμα του συζυγούς

Για $z_2 \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή:

$$z_1 / z_2 = (z_1 \cdot \bar{z}_2) / (z_2 \cdot \bar{z}_2)$$

$$z_1 / z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) / (x_2^2 + y_2^2) + (x_2y_1 - x_1y_2) / (x_2^2 + y_2^2) \cdot i$$

Γιατί δουλεύει πάντα

Ο παρονομαστής $x_2^2 + y_2^2$ είναι γνήσια θετικός, επειδή $z_2 \neq 0$ σημαίνει ότι τα x_2 και y_2 δεν είναι συγχρόνως μηδέν.

Παράδειγμα πράξεων

Πολλαπλασιασμός

$$(1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 3 + 5i + 2 = 5 + 5i$$

Διαίρεση

$$(1 + 2i) / (3 - i) = (1 + 2i)(3 + i) / 10 = (1 + 7i) / 10$$

$$= 1/10 + (7/10)i$$

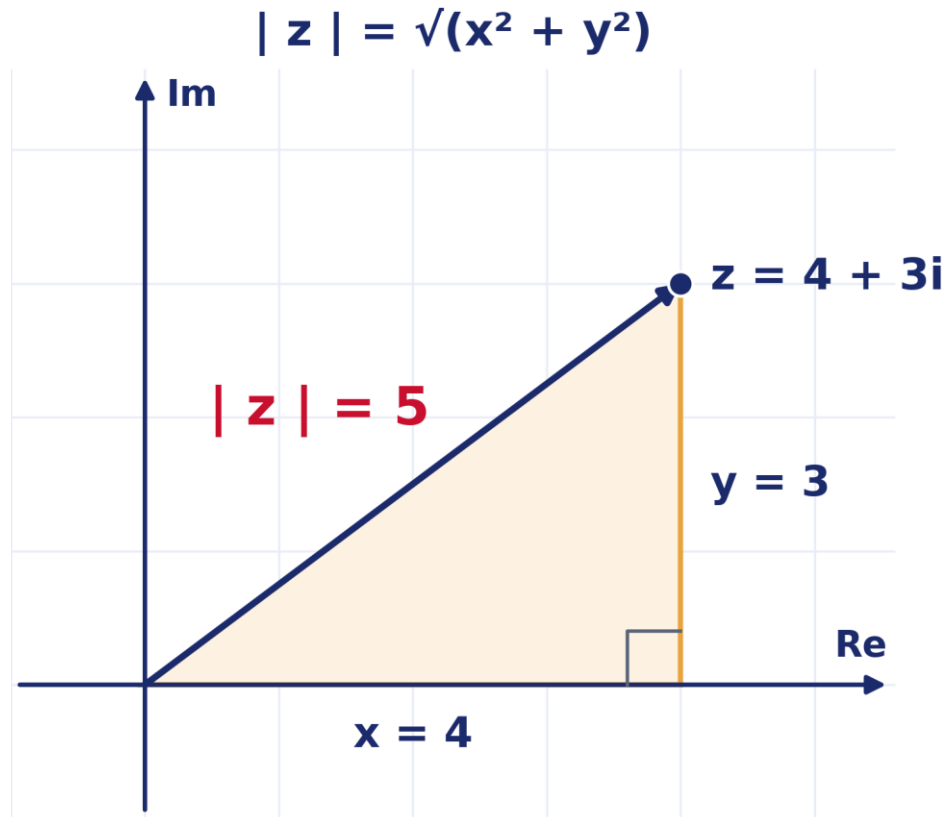
Ο παρονομαστής $(3-i)(3+i) = 9 + 1 = 10$ είναι πραγματικός — αυτό ήταν το ζητούμενο.

3

Μέτρο και απόσταση

Το μέτρο είναι απόσταση — και υπακούει στην τριγωνική ανισότητα

Το μέτρο ενός μιγαδικού



Πυθαγόρειο θεώρημα

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Βασικές ιδιότητες

$$|z| \geq 0$$

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

Παράδειγμα

$$|4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Η ταυτότητα $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Αναπτύσσουμε το γινόμενο:

$$(x + y i)(x - y i) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Γιατί είναι χρήσιμη

Μετατρέπει ένα μέτρο σε γινόμενο — και τα γινόμενα τα χειριζόμαστε αλγεβρικά.

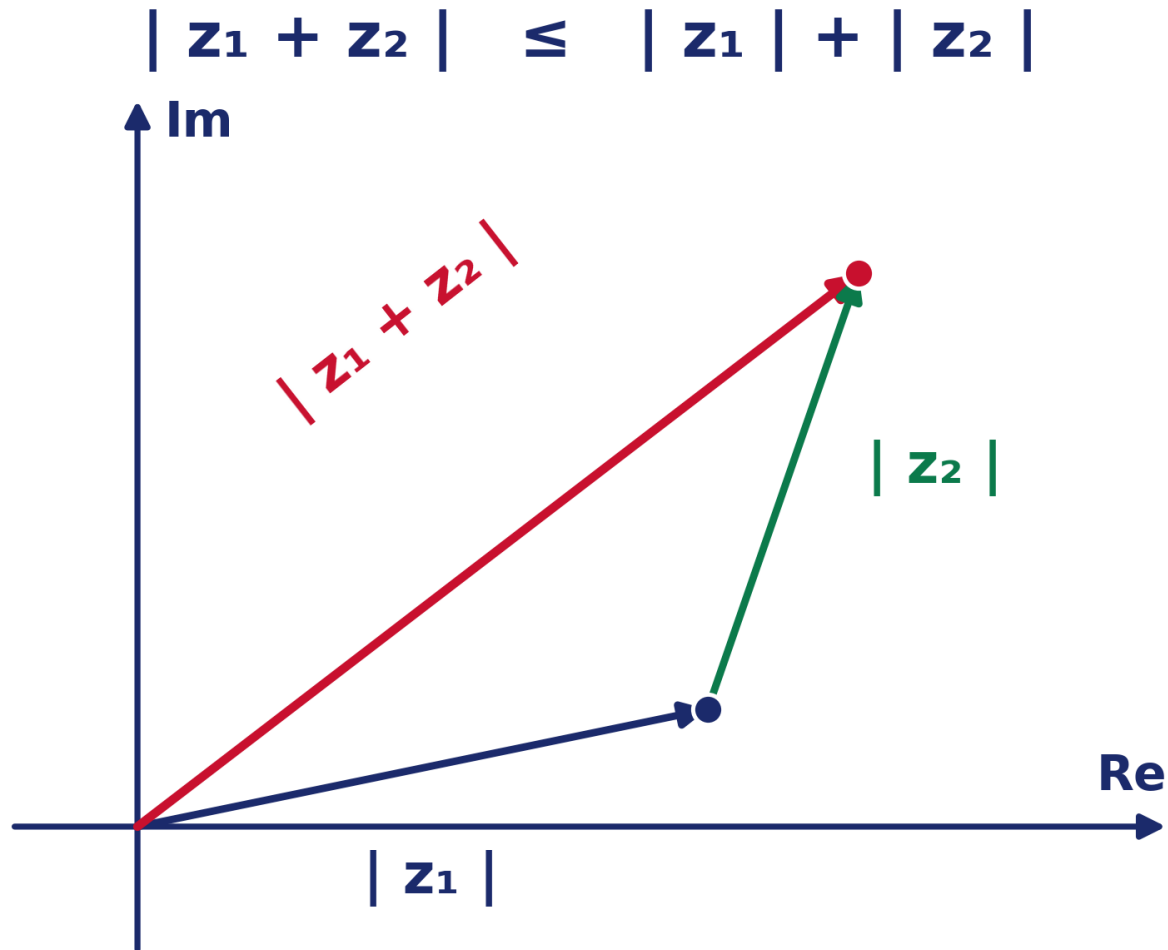
Θα τη χρησιμοποιήσουμε

για να αποδείξουμε ότι
 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Απόσταση δύο σημείων: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

$$\text{Παράδειγμα: } |(1 + i) - (4 + 5i)| = |-3 - 4i| = 5$$

Η τριγωνική ανισότητα



Τι λέει

Η άμεση απόσταση δεν υπερβαίνει το άθροισμα των δύο διαδοχικών αποστάσεων.

Γινόμενο

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Συζυγής και πηλίκo

$$|\bar{z}| = |z| \quad |z_1/z_2| = |z_1| / |z_2|$$

Απόδειξη του $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Χρησιμοποιούμε ότι ο συζυγής ενός γινομένου ισούται με το γινόμενο των συζυγών:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Παίρνοντας τις μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Προσέξτε τη δομή της απόδειξης

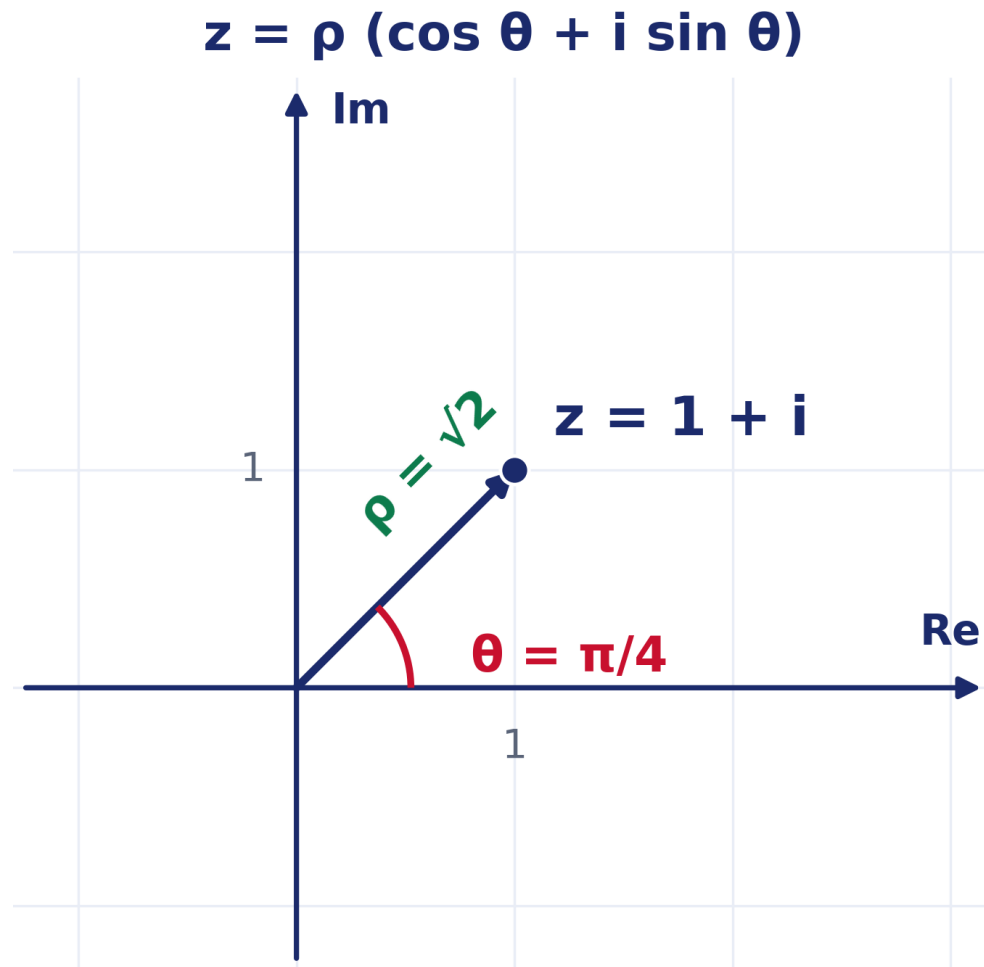
Δεν δουλεύουμε με το μέτρο απευθείας — δουλεύουμε με το τετράγωνό του, που είναι γινόμενο. Η ταυτότητα $|z|^2 = z \bar{z}$ είναι το κλειδί.

4

Πολική μορφή και όρισμα

Μέτρο και γωνία αντί για συντεταγμένες

Μέτρο και γωνία



$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

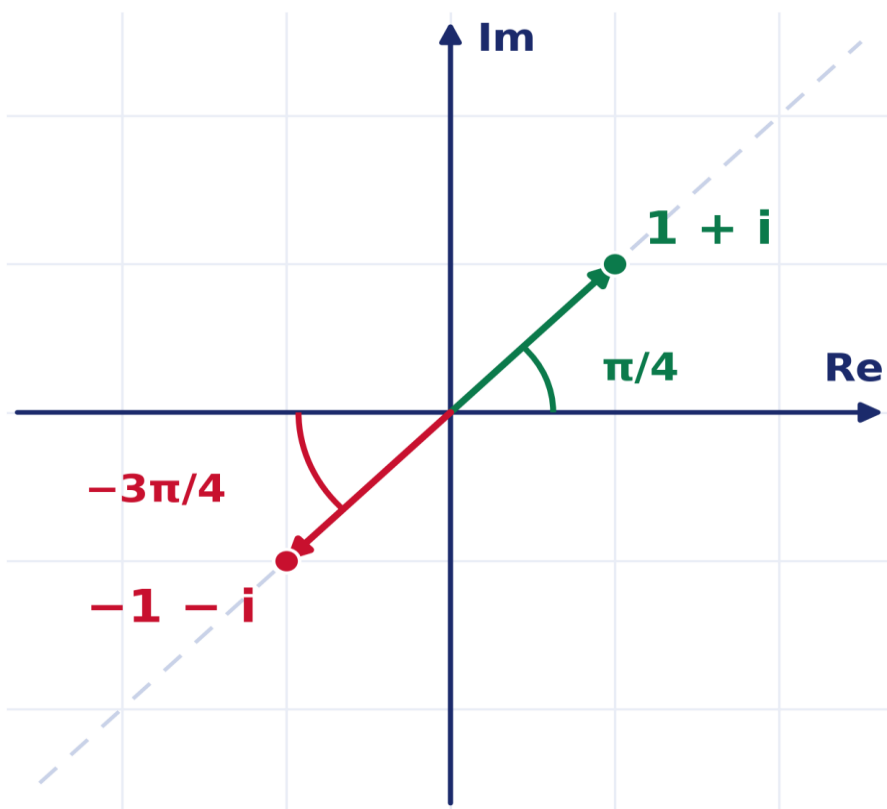
$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Η γωνία θ λέγεται όρισμα

Για $z \neq 0$ θέτουμε $\rho = |z| > 0$.
Το όρισμα ΔΕΝ είναι μοναδικό: οι
γωνίες $\theta + 2k\pi$ δίνουν τον ίδιο
μιγαδικό.

Γιατί δεν αρκεί το $\arctan(y/x)$

Και για τους δύο: $y/x = 1$



Η εφαπτομένη έχει περίοδο π

Το πρόβλημα

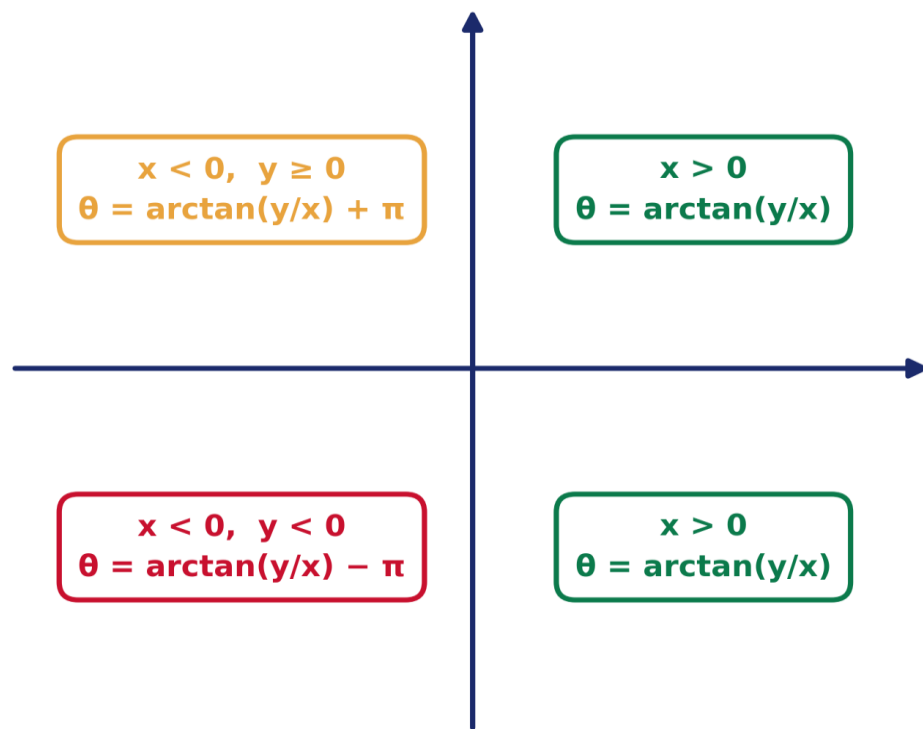
Η εφαπτομένη έχει περίοδο π . Ο λόγος y/x δεν ξεχωρίζει αντίθετα τεταρτημόρια.

Η λύση

Λαμβάνουμε υπόψη τα πρόσημα των x και y .
Όταν $x = 0$ διαβάζουμε απευθείας τη θέση πάνω στον φανταστικό άξονα.

Ο κανόνας του κύριου ορίσματος

Κύριο όρισμα στο $(-\pi, \pi]$



Για $x = 0$: $\theta = \pi/2$ αν $y > 0$, $\theta = -\pi/2$ αν $y < 0$

Παράδειγμα: $1 + i$

$$\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$$

$$1 + i = \sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

Παράδειγμα: $-1 - i$

Ο λόγος y/x είναι πάλι 1, αλλά το σημείο είναι στο τρίτο τεταρτημόριο.

Ένα όρισμα: $5\pi/4$

Κύριο όρισμα: $-3\pi/4$

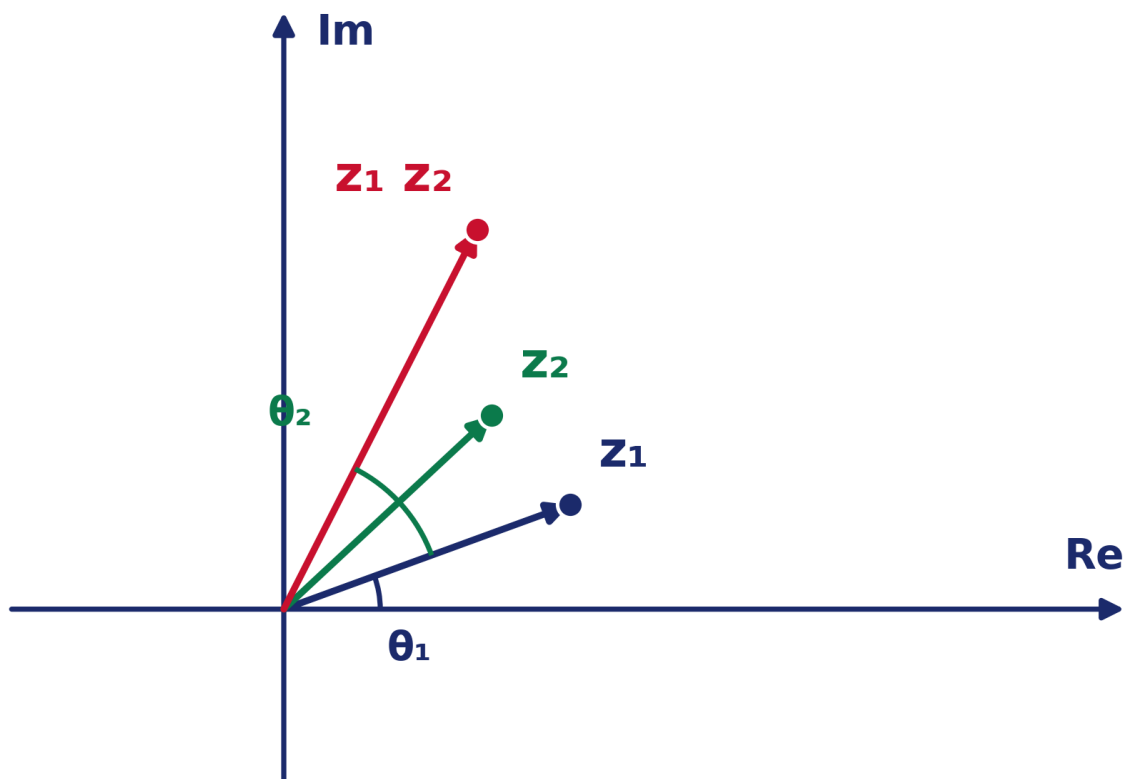
5

Δυνάμεις και μιγαδικές ρίζες

Ο τύπος του De Moivre και η γεωμετρία των ριζών

Γινόμενο σε πολική μορφή

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$



Ο κανόνας

Τα μέτρα πολλαπλασιάζονται.
Οι γωνίες προστίθενται.

Από πού προκύπτει

Αναπτύσσουμε το γινόμενο και εφαρμόζουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες πρόσθεσης για το $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ και το $\sin(\theta_1 + \theta_2)$.

τα μέτρα πολλαπλασιάζονται, οι γωνίες προστίθενται

Ο τύπος του De Moivre

$$[\rho (\cos \theta + i \sin \theta)]^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Πώς προκύπτει

Επαναλαμβάνοντας τον πολλαπλασιασμό n φορές: το μέτρο υψώνεται στην n , η γωνία πολλαπλασιάζεται επί n .

Γιατί είναι σημαντικός

Οι δυνάμεις γίνονται τετριμμένες — και αποκαλύπτεται η γεωμετρία των ριζών.

**Η καρτεσιανή μορφή βολεύει στην πρόσθεση.
Η πολική μορφή βολεύει στις δυνάμεις.**

Όλες οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = a$

Έστω $a \neq 0$, $a = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, και $z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi)$. Ο De Moivre δίνει:

$$\rho^n = r \qquad n \phi = \theta + 2k\pi$$

$$z_k = r^{1/n} [\cos ((\theta + 2k\pi) / n) + i \sin ((\theta + 2k\pi) / n)], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Ίδιο μέτρο

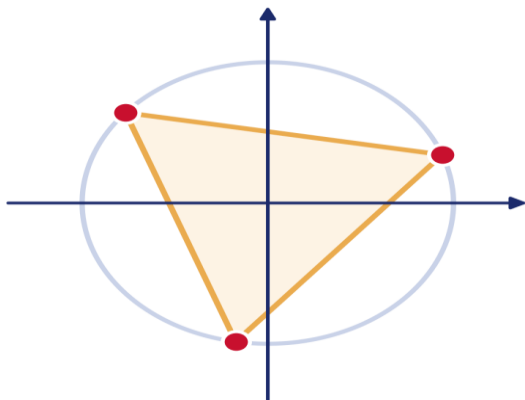
Όλες οι ρίζες έχουν μέτρο $r^{1/n}$ —
βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Ίσα γωνιακά βήματα

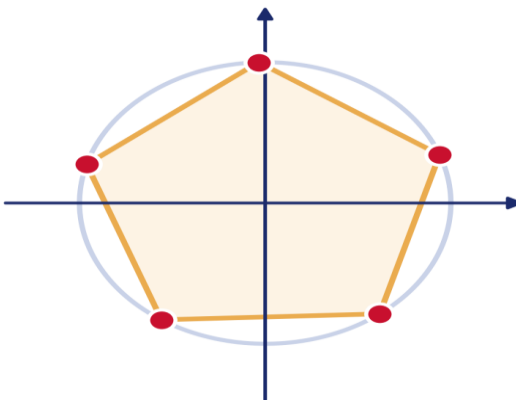
Οι διαδοχικές γωνίες διαφέρουν κατά $2\pi/n$.
Για $n \geq 3$ είναι κορυφές κανονικού n -γώνου.

Η γεωμετρία των n ριζών

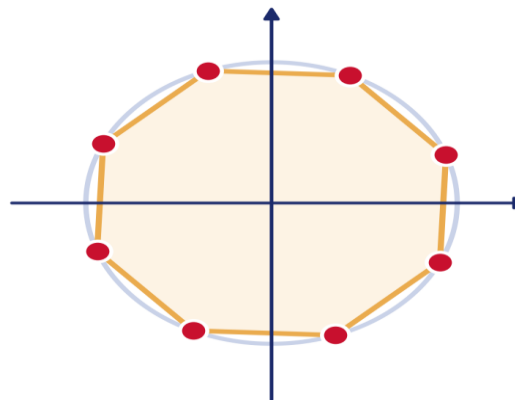
$n = 3$ βήμα $2\pi/3$



$n = 5$ βήμα $2\pi/5$



$n = 8$ βήμα $2\pi/8$



Οι n ρίζες σε ίσες γωνιακές αποστάσεις πάνω σε κύκλο ακτίνας $r^{1/n}$

Διαφορετική επιλογή ορίσματος του a αλλάζει μόνο την αρίθμηση των ίδιων ριζών

Το σχήμα είναι πάντα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $r^{1/n}$.

Δύο σημεία προσοχής

Οι τετραγωνικές ρίζες

Το σύμβολο $\sqrt{r}$ για $r \geq 0$ δηλώνει τη ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗ πραγματική ρίζα.
Στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2 = a$, για $a \neq 0$, έχει δύο αντίθετες λύσεις.

Η περίπτωση $a = 0$

Η μοναδική λύση είναι $z = 0$.
Ως ρίζα του πολυωνύμου z^n έχει πολλαπλότητα n — δεν έχουμε n διαφορετικές λύσεις.

Δεν εφαρμόζουμε μηχανικά στους μιγαδικούς κάθε κανόνα των πραγματικών ριζών

Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας

Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$, όταν μετράμε τις πολλαπλότητές τους. (Χωρίς απόδειξη εδώ.)

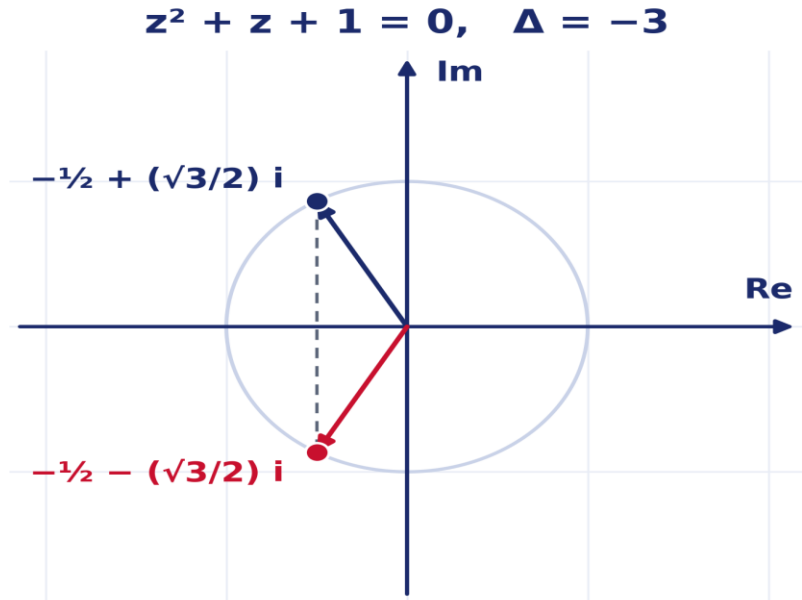
6

Παραδείγματα εξισώσεων

Δευτεροβάθμια με $\Delta < 0$, $z^4 = 16$, $z^4 = 4 - 3i$

Δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = (-\beta \pm i \sqrt{-\Delta}) / (2\alpha)$$



συζυγείς ρίζες: άθροισμα -1 , γινόμενο 1

Το παράδειγμα

$$z^2 + z + 1 = 0, \quad \Delta = 1 - 4 = -3$$

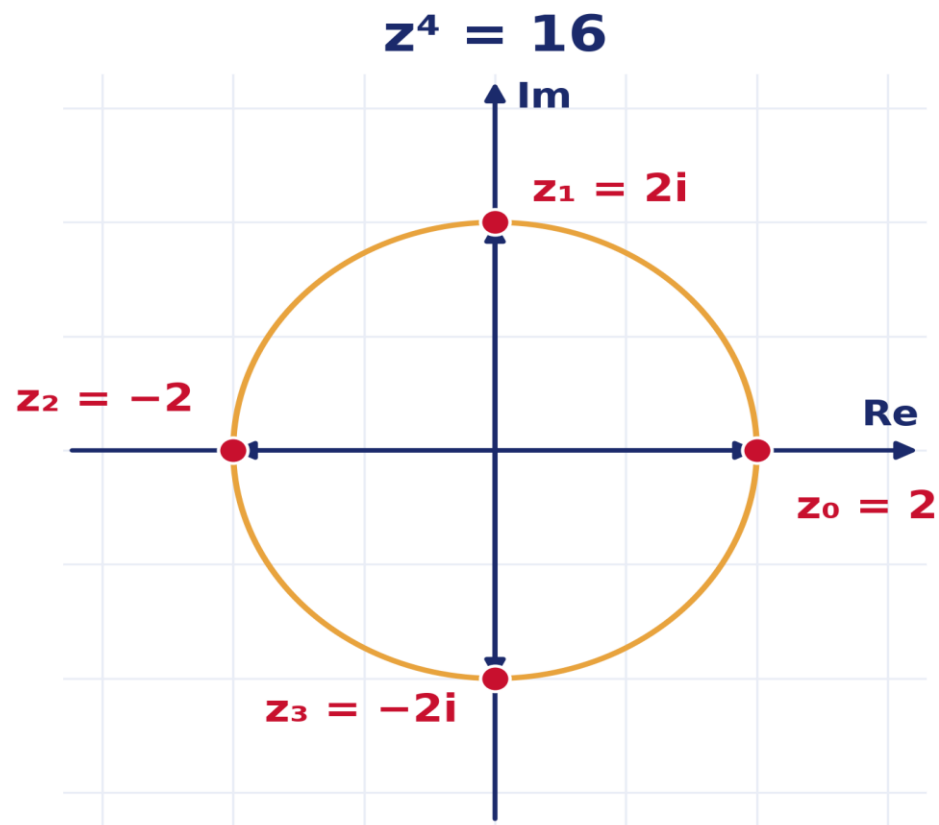
$$z_1 = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i \quad z_2 = -\frac{1}{2} - (\sqrt{3}/2)i$$

Έλεγχος με τις σχέσεις ριζών

Οι ρίζες είναι συζυγείς.

Άθροισμα $= -1$ Γινόμενο $= 1$

Οι τέσσερις ρίζες της $z^4 = 16$



ακτίνα 2, γωνιακό βήμα $\pi/2$

Στους πραγματικούς

βρίσκουμε μόνο δύο λύσεις:
2 και -2

$$z_k = 2 (\cos k\pi/2 + i \sin k\pi/2), \quad k = 0,1,2,3$$

Οι τέσσερις μιγαδικές λύσεις

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -2i$$

Το τελικό παράδειγμα: $z^4 = 4 - 3i$

Πρώτα το μέτρο και το όρισμα — το σημείο είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο:

$$|4 - 3i| = 5 \qquad \theta = -\arctan(3/4)$$

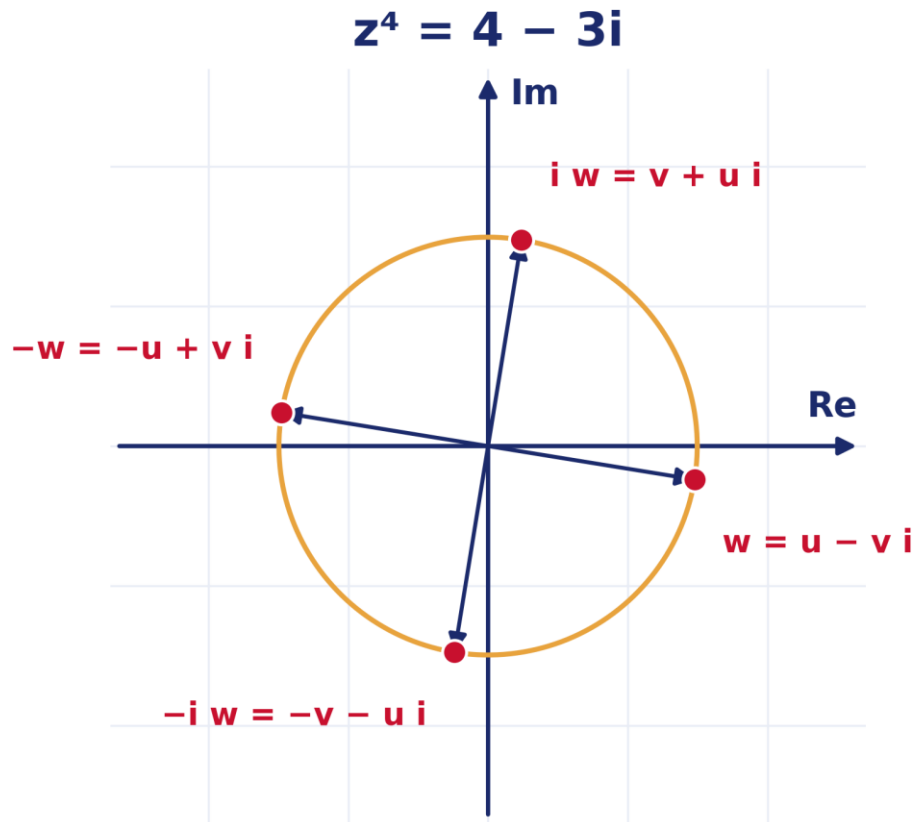
$$z_k = 5^{1/4} [\cos ((-\arctan(3/4) + 2k\pi) / 4) + i \sin ((-\arctan(3/4) + 2k\pi) / 4)]$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

Μπορούμε και ακριβή καρτεσιανή μορφή

$u = \sqrt{(\sqrt{5} + 3/\sqrt{2}) / 2}$, $v = \sqrt{(\sqrt{5} - 3/\sqrt{2}) / 2}$. Τότε μια ρίζα είναι $w = u - v i$.

Οι τέσσερις ρίζες και ο έλεγχος



μέτρο $5^{1/4} \approx 1,4953$, γωνιακό βήμα $\pi/2$

Από μία ρίζα, όλες

Πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά με i :
 $w, i w, -w, -i w$

Έλεγχος

$$u^2 - v^2 = 3/\sqrt{2} \quad 2uv = 1/\sqrt{2}$$

$$w^2 = (3 - i)/\sqrt{2}$$
$$w^4 = (3 - i)^2/2 = 4 - 3i$$



7

Τι κρατάμε από τη διάλεξη

Κάθε μορφή εξυπηρετεί διαφορετικό σκοπό

Τέσσερα εργαλεία, τέσσερις χρήσεις

Καρτεσιανή μορφή

πρόσθεση, αφαίρεση και
αλγεβρικές πράξεις

Ο συζυγής

μετατρέπει τον παρονομαστή
μιας διαίρεσης σε πραγματικό
αριθμό

Το μέτρο

εκφράζει απόσταση στο μιγαδικό
επίπεδο

Πολική μορφή

κάνει απλές τις δυνάμεις και
αποκαλύπτει τη γεωμετρία των
ριζών

Η σύνδεση με την 1η διάλεξη

Κάθε κανόνας έχει προϋποθέσεις. Η αυστηρότητα δεν είναι τελετουργία — είναι ο έλεγχος αυτών των προϋποθέσεων.

- 1 δεν διαιρούμε με μηδέν
- 2 δεν αποδίδουμε όρισμα στο μηδέν
- 3 επιλέγουμε σωστά το τεταρτημόριο
- 4 ξεχωρίζουμε το πλήθος των ριζών από την πολλαπλότητα

Και μία ακόμη: το $\mathbb{C}$ είναι σώμα, αλλά δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Προαιρετικές ερωτήσεις κατανόησης

1 Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $(2 - i) / (1 + i)$.

2 Γράψτε το $-\sqrt{3} + i$ σε πολική μορφή.

3 Βρείτε όλες τις λύσεις της $z^3 = 8$ και παραστήστε τις στο μιγαδικό επίπεδο.

4 Εξηγήστε γιατί το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Οι ερωτήσεις είναι εκτός εξεταστέας ύλης