

Μαθηματικός Λογισμός Ι – 1^η διάλεξη

Σύνολα και πραγματικοί αριθμοί

Γιατί χρειαζόμαστε μαθηματική αυστηρότητα

Η διαίσθηση μας βοηθά να αναγνωρίζουμε σχέσεις και να διατυπώνουμε εικασίες. Για να τις δεχθούμε ως μαθηματικά συμπεράσματα, χρειαζόμαστε σαφείς ορισμούς, ακριβείς υποθέσεις και αποδείξεις. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό όταν εξετάζουμε άπειρα σύνολα και διαδικασίες με απεριόριστα πολλά βήματα: μια ιδιότητα που ισχύει σε κάθε πεπερασμένο στάδιο δεν μεταφέρεται αυτόματα στο όριο.

Στο τέλος της διάλεξης θα δούμε δύο παραδείγματα. Μια σκάλα από οριζόντια και κατακόρυφα τμήματα πλησιάζει έναν κύκλο, αλλά τα μήκη της παραμένουν διαφορετικά από το μήκος του κύκλου. Επίσης, μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων μπορεί να έχει ασυνεχές όριο. Τα παραδείγματα εξηγούν γιατί χρειάζεται να προσδιορίζουμε τι ακριβώς συγκλίνει και ποια ιδιότητα θέλουμε να διατηρήσουμε.

Στόχος της πρώτης διάλεξης

Ο Μαθηματικός Λογισμός μελετά συναρτήσεις, όρια, μεταβολές και συσσωρεύσεις. Για να διατυπώσουμε αυτές τις έννοιες με ακρίβεια, χρειαζόμαστε τη γλώσσα των συνόλων και τη δομή των πραγματικών αριθμών. Στην πρώτη διάλεξη ξεκινάμε από απλά παραδείγματα συνόλων και τα βασικά αριθμητικά σύνολα και εξηγούμε τι σημαίνει ότι το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα: διαθέτει πράξεις με συγκεκριμένα αξιώματα, διάταξη συμβατή με αυτές και την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.

Μετά τη μελέτη της διάλεξης θα μπορούμε να εκτελούμε πράξεις συνόλων, να μετατρέπουμε περιοδικούς δεκαδικούς σε κλάσματα και να εξηγούμε την αριθμησιμότητα των ακεραίων και των ρητών. Θα διακρίνουμε το μέγιστο από το supremum, θα κατανοούμε τη σημασία της ολικής και μεταβατικής διάταξης και θα χρησιμοποιούμε το αξίωμα πληρότητας για να αποδεικνύουμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα και την αρχή των εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Θα γνωρίσουμε επίσης τη μαθηματική επαγωγή και, στο παράρτημα, την ιδέα της κατασκευής των αριθμών μέσω κλάσεων ισοδυναμίας και τομών Dedekind.

Συμβάσεις συμβολισμού. Γράφουμε $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Το σύμβολο $\subseteq$ επιτρέπει την ισότητα, ενώ το $\subsetneq$ δηλώνει γνήσιο υποσύνολο. Ο όρος «αριθμήσιμο» θα περιλαμβάνει εδώ και τα πεπερασμένα σύνολα. Όταν απαιτείται να τονίσουμε ότι το σύνολο είναι άπειρο, θα γράφουμε «αριθμησίμως άπειρο».

1 Η γλώσσα των συνόλων

Σύνολα και στοιχεία

Στην εισαγωγική προσέγγιση, **σύνολο** ονομάζουμε μια καλά ορισμένη συλλογή διακριτών αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά λέγονται στοιχεία του συνόλου. Η έκφραση «καλά ορισμένη» σημαίνει ότι η ιδιότητα που καθορίζει τη συλλογή δεν αφήνει ασάφεια ως προς τη συμμετοχή ενός αντικειμένου.

Η συλλογή «οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι από το 10» ορίζει σύνολο. Αντίθετα, η περιγραφή «οι μεγάλοι φυσικοί αριθμοί» χρειάζεται διευκρίνιση: πρέπει πρώτα να ορίσουμε τι εννοούμε με τη λέξη «μεγάλοι».

Γράφουμε $x \in A$ όταν το x είναι στοιχείο του A και $x \notin A$ όταν δεν είναι. Ένα σύνολο μπορεί να περιγραφεί με αναγραφή των στοιχείων του ή με μια κοινή ιδιότητά τους:

$$A = \{3, 7, 11\}, \quad E = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Στην τελευταία γραφή, το σύμβολο «:» διαβάζεται «όπου» ή «τέτοιο ώστε», ανάλογα με τη διατύπωση. Μπορούμε επίσης να γράψουμε $E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ αρτίος}\}$.

Η σειρά αναγραφής και οι επαναλήψεις δεν αλλάζουν ένα σύνολο. Για παράδειγμα,

$$\{3, 7, 11\} = \{11, 3, 7\} = \{3, 3, 7, 11\}.$$

Το **κενό σύνολο**, που συμβολίζεται με $\emptyset$, δεν έχει κανένα στοιχείο. Χρειάζεται να το διακρίνουμε από το $\{\emptyset\}$, το οποίο έχει ένα στοιχείο: το ίδιο το κενό σύνολο.

Υποσύνολα και ισότητα

Λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B , και γράφουμε $A \subseteq B$, όταν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B . Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Επομένως,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A.$$

Η ισοδυναμία αυτή δίνει μια συνηθισμένη μέθοδο απόδειξης της ισότητας δύο συνόλων: αποδεικνύουμε χωριστά τις δύο εγκλείσεις. Για κάθε σύνολο A ισχύουν $\emptyset \subseteq A$ και $A \subseteq A$.

Παράδειγμα 1. Αν $A = \{3, 7, 11\}$, τότε $3 \in A$ και $\{3\} \subseteq A$. Οι δύο προτάσεις εκφράζουν διαφορετικές σχέσεις: η πρώτη αφορά ένα στοιχείο, ενώ η δεύτερη ένα σύνολο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το $\{3\}$ δεν είναι στοιχείο του A .

Πληθικός αριθμός

Ο **πληθικός αριθμός**, ή η ισχύς, ενός πεπερασμένου συνόλου είναι το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων του και συμβολίζεται με $|A|$. Για παράδειγμα,

$$|\{3, 7, 11\}| = 3, \quad |\emptyset| = 0, \quad |\{\emptyset\}| = 1.$$

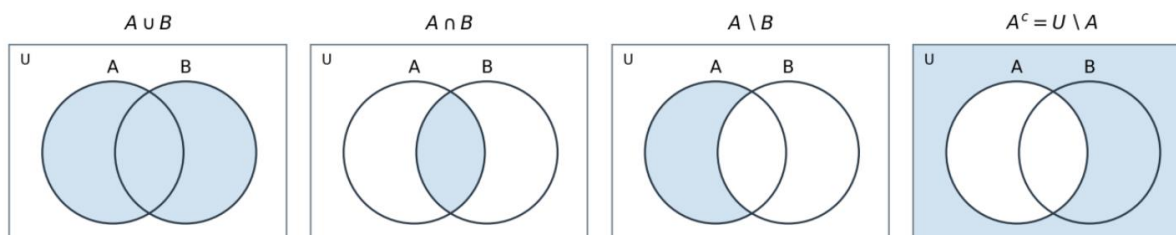
Για τα άπειρα σύνολα η σύγκριση της ισχύος γίνεται μέσω αντιστοιχίσεων. Θα δούμε ότι δύο σύνολα μπορούν να έχουν την ίδια ισχύ ακόμη και όταν το ένα είναι γνήσιο υποσύνολο του άλλου.

2 Πράξεις μεταξύ συνόλων

Για δύο σύνολα A και B ορίζουμε την ένωση, την τομή και τη διαφορά. Για να ορίσουμε συμπλήρωμα, καθορίζουμε πρώτα ένα σύνολο αναφοράς U , μέσα στο οποίο βρίσκονται τα σύνολα που μελετούμε.

Πράξη	Ορισμός	Περιγραφή
Ένωση	$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$	Ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα δύο σύνολα
Τομή	$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$	Ανήκει και στα δύο σύνολα
Διαφορά	$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$	Ανήκει στο A αλλά όχι στο B
Συμπλήρωμα	$A^c = U \setminus A$	Ανήκει στο σύνολο αναφοράς U αλλά όχι στο A

Το «ή» στην ένωση έχει συμπεριληπτική έννοια: επιτρέπει ένα στοιχείο να ανήκει και στα δύο σύνολα. Δύο σύνολα λέγονται **ξένα** όταν $A \cap B = \emptyset$.



Οι σκιασμένες περιοχές παριστάνουν την ένωση, την τομή, τη διαφορά και το συμπλήρωμα ως προς το ίδιο σύνολο αναφοράς.

Παράδειγμα 2. Έστω

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad A = \{1,2,3,5\}, \quad B = \{3,4,5,6\}.$$

Εξετάζοντας ποια στοιχεία ικανοποιούν κάθε ορισμό, βρίσκουμε:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A \cap B = \{3,5\}.$$

$$A \setminus B = \{1,2\}, \quad B \setminus A = \{4,6\}, \quad A^c = \{4,6,7,8\}.$$

Παρατηρούμε ότι γενικά $A \setminus B \neq B \setminus A$. Αν αλλάξουμε το σύνολο αναφοράς, μπορεί να αλλάξει και το συμπλήρωμα. Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του ίδιου A μέσα στο $\mathbb{N}$ περιέχει και όλους τους φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους από το 8.

Για πεπερασμένα σύνολα ισχύει ο τύπος

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Πράγματι, στην πρόσθεση $|A| + |B|$ κάθε κοινό στοιχείο έχει μετρηθεί δύο φορές. Αφαιρώντας το $|A \cap B|$, το μετράμε τελικά μία φορά. Στο παράδειγμα έχουμε $6 = 4 + 4 - 2$.

Χρήσιμες ταυτότητες

Η ένωση και η τομή είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές. Ισχύει επίσης η επιμεριστική ιδιότητα:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ιδιαίτερα χρήσιμοι είναι οι **νόμοι του De Morgan**, με όλα τα συμπληρώματα ως προς το ίδιο U :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Για να κατανοήσουμε τον πρώτο νόμο, παίρνουμε ένα $x \in U$. Το x δεν ανήκει στην ένωση ακριβώς όταν δεν ανήκει ούτε στο A ούτε στο B . Αυτό ισοδυναμεί με το ότι ανήκει και στα δύο συμπληρώματα. Η εξήγηση αυτή είναι συγχρόνως απόδειξη μέσω των στοιχείων των συνόλων.

3 Καρτεσιανό γινόμενο

Το **διατεταγμένο ζεύγος** (a, b) καταγράφει δύο στοιχεία μαζί με τη σειρά τους. Ισχύει $(a, b) = (c, d)$ ακριβώς όταν $a = c$ και $b = d$. Επομένως, τα $(2,4)$ και $(4,2)$ είναι διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη, ενώ τα σύνολα $\{2,4\}$ και $\{4,2\}$ είναι ίσα.

Το καρτεσιανό γινόμενο των A και B είναι το σύνολο

$$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}.$$

Παράδειγμα 3. Για τα σύνολα $A = \{3,7,11\}$ και $B = \{2,4\}$ έχουμε

$$A \times B = \{(3,2), (3,4), (7,2), (7,4), (11,2), (11,4)\}.$$

Για κάθε στοιχείο του A έχουμε δύο δυνατές επιλογές από το B . Άρα $|A \times B| = 3 \cdot 2 = 6$. Γενικότερα, για πεπερασμένα σύνολα,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Το $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών και ταυτίζεται με το καρτεσιανό επίπεδο. Αργότερα, η γραφική παράσταση μιας πραγματικής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}$ θα είναι το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$, όπου $x \in D$.

4 Τα βασικά αριθμητικά σύνολα

Οι διαδοχικές επεκτάσεις των αριθμητικών συνόλων επιτρέπουν να περιγράψουμε περισσότερες πράξεις και να λύνουμε περισσότερες εξισώσεις. Οι φυσικοί αρκούν για την απαρίθμηση. Οι ακέραιοι επιτρέπουν

την αφαίρεση χωρίς να βγαίνουμε από το σύνολο. Οι ρητοί επιτρέπουν τη διαίρεση με μη μηδενικό αριθμό. Οι πραγματικοί περιλαμβάνουν επιπλέον αριθμούς όπως η $\sqrt{2}$, που δεν είναι ρητοί.

Σύνολο	Περιγραφή	Παραδείγματα
$\mathbb{N}$	Θετικοί ακέραιοι	1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	Ακέραιοι	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	p/q με $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	-3, $1/2$, $13/10$
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Άρρητοι πραγματικοί	$\sqrt{2}$, π
$\mathbb{R}$	Ρητοί και άρρητοι μαζί	Όλα τα παραπάνω

Με τις συνήθεις ταυτίσεις των αριθμών στις διαδοχικές επεκτάσεις, ισχύει

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Για παράδειγμα, το -2 είναι ακέραιος αλλά όχι φυσικός, το $1/2$ είναι ρητός αλλά όχι ακέραιος και η $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αλλά όχι ρητός. Κάθε ακέραιος είναι ρητός, αφού $z = z/1$.

Μια διευκρίνιση για την κατασκευή των αριθμών. Οι ακέραιοι μπορούν να κατασκευαστούν από ζεύγη φυσικών αριθμών που παριστάνουν διαφορές, και οι ρητοί από ζεύγη ακεραίων που παριστάνουν κλάσματα. Χρειάζεται όμως να ταυτίζουμε διαφορετικά ζεύγη όταν παριστάνουν τον ίδιο αριθμό. Για παράδειγμα, τα $(3,1)$ και $(5,3)$ παριστάνουν την ίδια διαφορά, ενώ τα $(1,2)$ και $(2,4)$ το ίδιο κλάσμα. Επομένως, οι κατασκευές γίνονται με **κλάσεις ισοδυναμίας** και όχι με την απλή δήλωση ότι $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ή $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Η βασική ιδέα αναπτύσσεται στο Παράρτημα.

Οι πραγματικοί ως πλήρες διατεταγμένο σώμα

Οι πραγματικοί αριθμοί διαθέτουν τρεις ομάδες ιδιοτήτων: αξιώματα πράξεων, αξιώματα διάταξης και το αξίωμα πληρότητας. Οι δύο πρώτες ομάδες ισχύουν και για τους ρητούς. Η πληρότητα είναι η πρόσθετη ιδιότητα που εξασφαλίζει ότι η πραγματική ευθεία δεν έχει τα κενά των ρητών.

Αξιώματα των πράξεων

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο πραγματικών δίνουν πάλι πραγματικό αριθμό. Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \quad \text{και} \quad ab = ba \\(a + b) + c &= a + (b + c) \quad \text{και} \quad (ab)c = a(bc) \\a + 0 &= a \quad \text{και} \quad a \cdot 1 = a, \quad \text{με } 0 \neq 1 \\a + (-a) &= 0 \quad \text{και} \quad a \cdot a^{-1} = 1 \text{ για } a \neq 0 \\a(b + c) &= ab + ac\end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες γραμμές εκφράζουν την αντιμεταθετικότητα και την προσεταιριστικότητα. Τα 0 και 1 είναι τα ουδέτερα στοιχεία. Κάθε πραγματικός έχει προσθετικό αντίθετο και κάθε μη μηδενικός πραγματικός έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Η τελευταία γραμμή είναι η επιμεριστική ιδιότητα. Αυτές οι ιδιότητες ορίζουν τη δομή που ονομάζουμε σώμα.

Αξιώματα της διάταξης

Η σχέση $\leq$ είναι ανακλαστική: $a \leq a$. Είναι αντισυμμετρική: αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$. Είναι επίσης ολική και μεταβατική, με τις ακόλουθες έννοιες.

Ολική σημαίνει ότι κάθε δύο πραγματικοί μπορούν να συγκριθούν: για κάθε a, b ισχύει $a \leq b$ ή $b \leq a$. Αν $a = b$, ισχύουν και οι δύο σχέσεις. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 3 και 5 συγκρίνονται και $3 \leq 5$.

Μεταβατική σημαίνει ότι αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$. Για παράδειγμα, από $2 \leq 4$ και $4 \leq 7$ συμπεραίνουμε $2 \leq 7$.

Η διάταξη είναι συμβατή με τις πράξεις: αν $a \leq b$, τότε $a + c \leq b + c$ για κάθε c . Αν επιπλέον $c \geq 0$, τότε $ac \leq bc$. Αν $c < 0$, η φορά αντιστρέφεται και $ac \geq bc$. Για παράδειγμα, από $2 \leq 5$ παίρνουμε $-4 \geq -10$ όταν πολλαπλασιάσουμε με -2 .

Ένα σώμα με αυτές τις ιδιότητες διάταξης ονομάζεται διατεταγμένο σώμα. Για να χαρακτηρίσουμε τους πραγματικούς ως πλήρες διατεταγμένο σώμα, προσθέτουμε το αξίωμα πληρότητας, που θα διατυπώσουμε στην ενότητα των φραγμάτων.

5 Ρητοί και δεκαδικές αναπτύξεις

Ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός αν και μόνο αν η δεκαδική του ανάπτυξη είναι πεπερασμένη ή **τελικά περιοδική**. Τελικά περιοδική σημαίνει ότι, από κάποια θέση και μετά, επαναλαμβάνεται σταθερά η ίδια πεπερασμένη ομάδα ψηφίων.

Κάθε πεπερασμένος δεκαδικός γράφεται ως κλάσμα με παρονομαστή μια δύναμη του 10. Για παράδειγμα,

$$1,3 = \frac{13}{10}, \quad -0,125 = -\frac{125}{1000} = -\frac{1}{8}.$$

Ένας άπειρος δεκαδικός μπορεί επίσης να είναι ρητός. Το κρίσιμο χαρακτηριστικό είναι η περιοδικότητα, όχι το αν τα ψηφία συνεχίζονται επ' άπειρον.

Μετατροπή περιοδικού δεκαδικού σε κλάσμα

Παράδειγμα 4. Θέτουμε $x = 1,3333 \dots$. Πολλαπλασιάζουμε επί 10, ώστε τα περιοδικά τμήματα να ευθυγραμμιστούν:

$$10x = 13,3333 \dots, \quad x = 1,3333 \dots$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε $9x = 12$, άρα $x = 4/3$. Η διαδικασία στηρίζεται στο ότι οι δύο αριθμοί έχουν ακριβώς το ίδιο άπειρο δεκαδικό τμήμα.

Παράδειγμα 5. Να γραφεί ως κλάσμα ο αριθμός

$$\rho = 7,452373737 \dots = 7,452\overline{37}.$$

Το μη περιοδικό τμήμα μετά την υποδιαστολή έχει τρία ψηφία, τα 452, και η περίοδος έχει δύο ψηφία, τα 37. Πολλαπλασιάζουμε αρχικά επί 10^3 και στη συνέχεια επί 10^{3+2} :

$$1000\rho = 7452,373737 \dots,$$

$$100000\rho = 745237,373737 \dots$$

Αφαιρώντας, το περιοδικό μέρος απαλείφεται:

$$99000\rho = 745237 - 7452 = 737785.$$

Επομένως,

$$\rho = \frac{737785}{99000} = \frac{147557}{19800}.$$

Ως έλεγχο, μπορούμε να διασπάσουμε τον ίδιο αριθμό σε ένα πεπερασμένο και ένα περιοδικό μέρος:

$$\rho = \frac{7452}{1000} + \frac{1}{1000} \cdot \frac{37}{99}.$$

Γενικός κανόνας. Αν υπάρχουν m μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία και περίοδος μήκους k , αφαιρούμε τις εξισώσεις για τα $10^{m+k}x$ και $10^m x$. Ο συντελεστής του x είναι τότε $10^m(10^k - 1)$. Η μέθοδος εφαρμόζεται αρχικά στη θετική απόλυτη τιμή και, αν χρειάζεται, επαναφέρουμε το αρνητικό πρόσημο.

Γιατί κάθε ρητός έχει τελικά περιοδική ανάπτυξη

Αρκεί να εξετάσουμε τη διαίρεση ενός μη αρνητικού ακεραίου με έναν θετικό ακέραιο q . Σε κάθε βήμα της δεκαδικής διαίρεσης το υπόλοιπο είναι ένα από τα $0, 1, \dots, q-1$. Αν εμφανιστεί υπόλοιπο μηδέν, η ανάπτυξη τερματίζεται. Διαφορετικά, επειδή οι δυνατές τιμές των υπολοίπων είναι πεπερασμένες, κάποιο υπόλοιπο επανεμφανίζεται. Από εκεί και πέρα επαναλαμβάνονται τα ίδια βήματα και, συνεπώς, τα ίδια ψηφία.

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται με την αφαίρεση που χρησιμοποιήσαμε στα παραδείγματα. Έτσι τεκμηριώνεται το κριτήριο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ένας αριθμός μπορεί να έχει δύο δεκαδικές αναπτύξεις, όπως $1 = 0,999 \dots$. Αυτή η μη μοναδικότητα δεν αλλάζει το κριτήριο.

Πώς τεκμηριώνεται ότι ένας αριθμός είναι άρρητος

Τα πρώτα ψηφία μιας δεκαδικής ανάπτυξης δεν αρκούν για να αποφασίσουμε αν ο αριθμός είναι άρρητος. Η αναγραφή πολλών φαινομενικά ακανόνιστων ψηφίων, ακολουθούμενων από αποσιωπητικά, δεν καθορίζει αναγκαστικά ολόκληρο τον αριθμό και δεν αποτελεί απόδειξη μη περιοδικότητας.

Παράδειγμα 6. Η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $\sqrt{2} = p/q$, όπου $p, q \in \mathbb{N}$ και το κλάσμα είναι ανάγωγο. Τότε $p^2 = 2q^2$, άρα το p^2 είναι άρτιο. Επομένως, το p είναι άρτιο, διότι το τετράγωνο κάθε περιττού είναι περιττό. Γράφουμε $p = 2r$ και παίρνουμε $q^2 = 2r^2$, οπότε και το q είναι άρτιο. Αυτό αντιφάσκει με το ότι το p/q είναι ανάγωγο.

Ένα δεκαδικό παράδειγμα με σαφή κανόνα είναι το 0,101001000100001 ...: μεταξύ διαδοχικών ψηφίων 1 παρεμβάλλονται αντίστοιχα ένα, δύο, τρία, τέσσερα και ούτω καθεξής μηδενικά. Η ανάπτυξη έχει άπειρα ψηφία 1 και διαστήματα μηδενικών με απεριόριστο μήκος. Δεν μπορεί να είναι τελικά περιοδική: μια

επαναλαμβανόμενη ομάδα που περιέχει 1 θα επέβαλλε φραγμένα διαστήματα μεταξύ των ψηφίων 1, ενώ μια ομάδα μόνο από μηδενικά θα επέτρεπε πεπερασμένα συνολικά ψηφία 1. Άρα ο αριθμός είναι άρρητος.

6 Πεπερασμένα και αριθμήσιμα σύνολα

Η έννοια της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι **ένα προς ένα** όταν διαφορετικά στοιχεία του A έχουν διαφορετικές εικόνες. Είναι **επί** όταν κάθε στοιχείο του B εμφανίζεται ως εικόνα κάποιου στοιχείου του A . Αν ισχύουν και οι δύο ιδιότητες, η f είναι **αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία**, ή αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Τότε τα A και B έχουν την ίδια ισχύ.

Ένα σύνολο είναι πεπερασμένο όταν είναι κενό ή όταν μπορεί να αντιστοιχιστεί αμφιμονοσήμαντα με το $\{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Είναι άπειρο όταν δεν είναι πεπερασμένο. Είναι αριθμησίμως άπειρο όταν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$.

Η τελευταία συνθήκη σημαίνει ότι μπορούμε να οργανώσουμε όλα τα στοιχεία του σε μια λίστα

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

χωρίς παραλείψεις και χωρίς επαναλήψεις. Κάθε στοιχείο πρέπει να εμφανίζεται σε κάποια πεπερασμένη θέση. Δεν απαιτείται η λίστα να είναι ταξινομημένη κατά μέγεθος.

Παράδειγμα 7. Το σύνολο των θετικών άρτιων αριθμών $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ είναι αριθμησίμως άπειρο. Η συνάρτηση $g: \mathbb{N} \rightarrow E$, με $g(n) = 2n$, είναι ένα προς ένα και επί. Έτσι, το E είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ αλλά έχει την ίδια ισχύ με αυτό. Πρόκειται για χαρακτηριστική ιδιότητα των άπειρων συνόλων.

Οι ακέραιοι είναι αριθμησίμως άπειροι

Η λίστα

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

περιλαμβάνει κάθε ακέραιο ακριβώς μία φορά. Η αντίστοιχη αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το $\mathbb{Z}$ προς το $\mathbb{N}$ ορίζεται ως εξής: για $z \geq 0$ θέτουμε $f(z) = 2z + 1$, ενώ για $z < 0$ θέτουμε $f(z) = -2z$.

Οι μη αρνητικοί ακέραιοι στέλνονται στους περιττούς φυσικούς, ενώ οι αρνητικοί στους άρτιους φυσικούς:

Ακέραιος z	0	-1	1	-2	2	-3	3
Θέση $f(z)$	1	2	3	4	5	6	7

Απόδειξη ότι είναι ένα προς ένα. Αν δύο ακέραιοι ανήκουν στον ίδιο κλάδο, η ισότητα των εικόνων τους δίνει αμέσως ισότητα των ακεραίων. Αν ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους, η μία εικόνα είναι περιττή και η άλλη άρτια, οπότε δεν μπορούν να είναι ίσες.

Απόδειξη ότι είναι επί. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, τότε $n = f((n-1)/2)$. Αν είναι άρτιος, τότε $n = f(-n/2)$. Άρα κάθε φυσικός έχει προεικόνα και το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμησίμως άπειρο.

Οι ρητοί είναι επίσης αριθμησίμως άπειροι

Αρχικά εξετάζουμε τους θετικούς ρητούς, που γράφονται ως p/q με $p, q \in \mathbb{N}$. Οργανώνουμε τα ζεύγη (p, q) κατά αυξανόμενο άθροισμα $p+q$ και, μέσα σε κάθε ομάδα, κατά αυξανόμενο p :

Τιμή του $p+q$	Υποψήφια κλάσματα
2	1/1
3	1/2, 2/1
4	1/3, 2/2, 3/1
5	1/4, 2/3, 3/2, 4/1

Κρατάμε μόνο τα ανάγωγα κλάσματα, ώστε κάθε θετικός ρητός να εμφανίζεται μία φορά. Κάθε τέτοιο κλάσμα έχει συγκεκριμένο πεπερασμένο άθροισμα αριθμητή και παρονομαστή, άρα η διαδικασία θα φτάσει σε αυτό μετά από πεπερασμένα βήματα. Έτσι προκύπτει μια απαρίθμηση $r_1, r_2, r_3, \dots$ των θετικών ρητών.

Προσθέτοντας το μηδέν και εναλλάσσοντας τα πρόσημα, παίρνουμε

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots,$$

που απαριθμεί ολόκληρο το $\mathbb{Q}$. Οι ρητοί λοιπόν είναι αριθμησίμως άπειροι, παρότι ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο διαφορετικούς ρητούς υπάρχει και άλλος ρητός, για παράδειγμα ο μέσος όρος τους. Η δυνατότητα απαρίθμησης δεν εξαρτάται από το πόσο κοντά βρίσκονται οι αριθμοί μεταξύ τους.

Οι πραγματικοί δεν είναι αριθμήσιμοι

Το διάστημα $(0,1)$ δεν μπορεί να απαριθμηθεί. Η **διαγώνια απόδειξη του Cantor** δείχνει ότι, όποια λίστα και αν προτείνουμε, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αριθμό του διαστήματος που λείπει από αυτήν.

Υποθέτουμε ότι μια λίστα $x_1, x_2, \dots$ περιέχει όλους τους αριθμούς του $(0,1)$. Γράφουμε κάθε x_n σε δεκαδική ανάπτυξη επιλέγοντας εκείνη που δεν καταλήγει σε ατέρμονη ακολουθία από 9. Έστω d_{nn} το n -ο δεκαδικό ψηφίο του x_n . Κατασκευάζουμε τον $y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ με τον εξής κανόνα:

αν $d_{nn} = 1$, θέτουμε $b_n = 2$, ενώ αν $d_{nn} \neq 1$, θέτουμε $b_n = 1$.

Ο y ανήκει στο $(0,1)$ και διαφέρει από τον x_n στο n -ο ψηφίο, για κάθε n . Η χρήση μόνο των ψηφίων 1 και 2 αποφεύγει την ασάφεια των διπλών δεκαδικών αναπτύξεων. Άρα ο y δεν βρίσκεται στη λίστα, αντίφαση.

Επομένως, το $(0,1)$ και το $\mathbb{R}$ είναι **μη αριθμήσιμα**. Μη αριθμήσιμο είναι και το σύνολο των αρρήτων: αν ήταν αριθμήσιμο, θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε μια απαρίθμησή του με μια απαρίθμηση των ρητών και να απαριθμήσουμε το $\mathbb{R}$.

7 Διαστήματα και φράγματα

Διαστήματα της πραγματικής ευθείας

Για $a < b$, η διαφορά μεταξύ ανοικτού και κλειστού άκρου αφορά το αν το αντίστοιχο άκρο ανήκει στο σύνολο:

Συμβολισμός	Συνθήκη
(a,b)	$a < x < b$
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$
$[a,b)$	$a \leq x < b$
$(a,b]$	$a < x \leq b$
$[a,+\infty)$	$x \geq a$
$(-\infty,b]$	$x < b$

Τα $+\infty$ και $-\infty$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Στα αντίστοιχα άκρα χρησιμοποιούμε πάντα παρένθεση. Επίσης, για $a = b$ έχουμε $[a, a] = \{a\}$, ενώ $(a, a) = \emptyset$.

Άνω και κάτω φράγματα

Έστω μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ είναι **άνω φράγμα** του A αν $x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Αντίστοιχα, ο $m \in \mathbb{R}$ είναι **κάτω φράγμα** αν $m \leq x$ για κάθε $x \in A$. Το σύνολο λέγεται φραγμένο όταν έχει και άνω και κάτω φράγμα.

Το **supremum**, ή ελάχιστο άνω φράγμα, είναι το μικρότερο από όλα τα άνω φράγματα και συμβολίζεται με $\sup A$. Το **infimum**, ή μέγιστο κάτω φράγμα, είναι το μεγαλύτερο από όλα τα κάτω φράγματα και συμβολίζεται με $\inf A$.

Το **μέγιστο** του A , όταν υπάρχει, είναι στοιχείο του A μεγαλύτερο ή ίσο από όλα τα υπόλοιπα. Συμβολίζεται με $\max A$. Το **ελάχιστο** ορίζεται αντίστοιχα και συμβολίζεται με $\min A$.

Αν το A έχει πραγματικό supremum, τότε έχει μέγιστο ακριβώς όταν $\sup A \in A$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $\max A = \sup A$. Η ανάλογη σχέση ισχύει για το ελάχιστο και το infimum.

Παράδειγμα 8. Για το $A = (0,1)$ έχουμε $\inf A = 0$ και $\sup A = 1$, αλλά δεν υπάρχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο. Πράγματι, για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει

$$0 < \frac{x}{2} < x < \frac{x+1}{2} < 1.$$

Άρα υπάρχουν μέσα στο A τόσο μικρότερο όσο και μεγαλύτερο στοιχείο από το x .

Παράδειγμα 9. Για το $B = [0,1]$ έχουμε $\min B = \inf B = 0$ και $\sup B = 1$, αλλά δεν υπάρχει μέγιστο. Για το $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ έχουμε $\max C = \sup C = 1$ και $\inf C = 0$, αλλά δεν υπάρχει ελάχιστο: κάθε στοιχείο $1/n$ έχει μικρότερο στοιχείο το $1/(n+1)$.



Στο ανοικτό διάστημα τα άκρα είναι φράγματα αλλά δεν ανήκουν στο σύνολο. Στο ημίκλειστο διάστημα το αριστερό άκρο ανήκει στο σύνολο και είναι το ελάχιστο.

Το αξίωμα πληρότητας

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $s = \sup A$.

Στην αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών η πρόταση αυτή γίνεται δεκτή ως αξίωμα και δεν αποδεικνύεται από τα αξιώματα πράξεων και διάταξης. Από αυτήν αποδεικνύονται στη συνέχεια η Αρχιμήδεια ιδιότητα και η αρχή των εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Αν αντίθετα κατασκευάσουμε τους πραγματικούς μέσω τομών Dedekind, αποδεικνύουμε ότι η κατασκευή έχει αυτή την ιδιότητα.

Προσοχή: το supremum ανήκει στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν χρειάζεται να ανήκει στο A . Για $A = (0, 1)$ έχουμε $\sup A = 1$, ενώ $1 \notin A$. Αν το supremum ανήκει στο A , είναι και το μέγιστό του.

Αντίστοιχα, κάθε μη κενό σύνολο που είναι φραγμένο κάτω έχει infimum στο $\mathbb{R}$. Αυτό είναι συνέπεια του αξιώματος: εφαρμόζουμε την πληρότητα στο $-A = \{-x : x \in A\}$ και παίρνουμε $\inf A = -\sup(-A)$.

Για να δείξουμε ότι ένας υποψήφιος αριθμός s είναι το supremum ενός μη κενού συνόλου A , ελέγχουμε δύο πράγματα: ότι είναι άνω φράγμα και ότι κανένας μικρότερος αριθμός δεν είναι άνω φράγμα. Εφόσον το s είναι άνω φράγμα, η δεύτερη συνθήκη σημαίνει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - \varepsilon < x \leq s.$$

Η συνθήκη αυτή συνδέει τα φράγματα με την έννοια της προσέγγισης, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στα όρια.

Γιατί η πληρότητα έχει σημασία. Το σύνολο $D = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q, q^2 < 2\}$ είναι μη κενό και φραγμένο άνω. Όταν το θεωρούμε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει supremum τη $\sqrt{2}$. Η $\sqrt{2}$ όμως δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$, και το D δεν έχει ρητό ελάχιστο άνω φράγμα. Οι ρητοί συνεπώς δεν διαθέτουν την ίδια ιδιότητα πληρότητας. Η πυκνότητά τους στην πραγματική ευθεία, δηλαδή η ύπαρξη ρητού ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς πραγματικούς, δεν εξασφαλίζει πληρότητα.

8 Η Αρχιμήδεια ιδιότητα

Η **Αρχιμήδεια ιδιότητα** δηλώνει ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $n > x$. Με άλλα λόγια, το $\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο άνω μέσα στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη από την πληρότητα. Αν το $\mathbb{N}$ ήταν φραγμένο άνω, θα είχε supremum s . Ο $s-1$ δεν θα ήταν άνω φράγμα, οπότε θα υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ με $n > s-1$. Τότε ο φυσικός $n+1$ θα ικανοποιούσε $n+1 > s$, αντίφαση.

Μια χρήσιμη συνέπεια είναι ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αρκεί να επιλέξουμε $n > 1/\varepsilon$. Επιπλέον, για κάθε $k \geq n$ ισχύει $1/k \leq 1/n < \varepsilon$. Η ίδια ιδέα θα χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $1/n$ συγκλίνει στο μηδέν.

Παράδειγμα 10. Αν θέλουμε $1/n < 0,001$, χρειαζόμαστε $n > 1000$. Η μικρότερη επιτρεπτή φυσική τιμή είναι $n = 1001$. Το $n = 1000$ δίνει ισότητα και δεν ικανοποιεί τη ζητούμενη αυστηρή ανισότητα.

Επιστρέφοντας στο $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, το 0 είναι κάτω φράγμα. Κάθε $m > 0$ αποτυγχάνει να είναι κάτω φράγμα, επειδή υπάρχει n με $1/n < m$. Έτσι ολοκληρώνεται αυστηρά η απόδειξη ότι $\inf C = 0$.

9 Μαθηματική επαγωγή

Η μαθηματική επαγωγή είναι μέθοδος απόδειξης προτάσεων που εξαρτώνται από έναν φυσικό αριθμό. Για να αποδείξουμε μια πρόταση $P(n)$ για κάθε $n \geq n_0$, χρειαζόμαστε:

1. **Βάση επαγωγής.** Αποδεικνύουμε ότι ισχύει η $P(n_0)$.
2. **Επαγωγικό βήμα.** Για έναν αυθαίρετο $k \geq n_0$, υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(k)$ και αποδεικνύουμε ότι τότε ισχύει η $P(k+1)$.

Η αρχή της επαγωγής επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι ισχύει η $P(n)$ για όλους τους φυσικούς $n \geq n_0$. Η υπόθεση $P(k)$ χρησιμοποιείται μέσα στην απόδειξη της συνεπαγωγής. Δεν αποτελεί ανεξάρτητη παραδοχή ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ήδη αληθές.

Παράδειγμα 11. Να αποδειχθεί ότι

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για $n = 1$, οι δύο πλευρές είναι ίσες με 1. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο αυθαίρετο $k \geq 1$ ισχύει

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Προσθέτοντας το $k+1$ και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Αυτός είναι ακριβώς ο ζητούμενος τύπος για $n = k+1$. Άρα, από την αρχή της επαγωγής, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 12. Να αποδειχθεί ότι $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Για $n = 0$, έχουμε $1 \geq 1$. Αν $2^k \geq k+1$, τότε

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(k+1) \geq k+2,$$

επειδή $k \geq 0$. Επομένως, η πρόταση ισχύει και για το $k+1$.

Προσοχή στη λογική της μεθόδου. Η επαλήθευση πολλών αρχικών περιπτώσεων δεν αντικαθιστά το επαγωγικό βήμα. Αντίστοιχα, ένα σωστό επαγωγικό βήμα χωρίς βάση δεν αρκεί: πρέπει να υπάρχει μια αρχική αληθής πρόταση από την οποία θα ξεκινήσει η διαδικασία.

10 Ασκήσεις για εμπέδωση

Οι ασκήσεις ακολουθούν τη σειρά των εννοιών της διάλεξης. Δοκιμάστε πρώτα να γράψετε δική σας λύση και έπειτα ελέγξτε την με τις ενδεικτικές λύσεις που ακολουθούν.

Άσκηση 1. Δίνονται $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,2,3,4\}$ και $B = \{3,4,5,6\}$. Βρείτε τα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ και A^c . Ελέγξτε τον πρώτο νόμο του De Morgan.

Άσκηση 2. Για $A = \{1,2\}$ και $B = \{a, b, c\}$, γράψτε τα $A \times B$ και $B \times A$. Είναι ίσα; Πόσα στοιχεία έχει καθένα; Υπολογίστε επίσης τα $|\emptyset|$ και $|\{\emptyset\}|$.

Άσκηση 3. Γράψτε ως ανάγωγα κλάσματα τους αριθμούς $0,272727\dots$ (περίοδος 27) και $2,16666\dots$ (περίοδος 6). Εξηγήστε γιατί και οι δύο είναι ρητοί, παρότι έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Άσκηση 4. Δώστε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ προς το σύνολο $O = \{1,3,5,7, \dots\}$ και αποδείξτε τις δύο απαιτούμενες ιδιότητες.

Άσκηση 5. Στην απαρίθμηση των ακεραίων της ενότητας 6, σε ποια θέση βρίσκεται το -4 ; Ποιος ακέραιος βρίσκεται στη θέση 11; Εξηγήστε γιατί η λίστα $0,1,2,3, \dots$ δεν απαριθμεί το $\mathbb{Z}$.

Άσκηση 6. Βρείτε supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο, όπου υπάρχουν, για τα σύνολα $A = [-2,3]$, $B = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ και $C = \mathbb{N}$.

Άσκηση 7. Βρείτε τη μικρότερη φυσική τιμή του n για την οποία ισχύει $1/n < 0,0001$. Εξηγήστε τη διαφορά από την περίπτωση $1/n \leq 0,0001$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι το άθροισμα των πρώτων n θετικών περιττών αριθμών είναι n^2 .

Άσκηση 9. Χαρακτηρίστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λανθασμένη και αιτιολογήστε: «κάθε άπειρο σύνολο είναι αριθμήσιμο», «κάθε φραγμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο», «κάθε ρητός έχει πεπερασμένη δεκαδική ανάπτυξη», «η πυκνότητα συνεπάγεται μη αριθμησιμότητα».

Άσκηση 10. Για το $A = (0,1)$ αποδείξτε ότι το 1 είναι άνω φράγμα και ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ με $1 - \varepsilon < x$. Συμπεράνετε ότι $\sup A = 1$.

11 Ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων

Λύση 1. Έχουμε $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$ και $A^c = \{5,6,7,8,9,10\}$. Επίσης, $B^c = \{1,2,7,8,9,10\}$. Άρα

$$(A \cup B)^c = \{7,8,9,10\} = A^c \cap B^c.$$

Λύση 2. Το $A \times B$ είναι το σύνολο $\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$. Το $B \times A$ προκύπτει αντιστρέφοντας τη σειρά σε κάθε ζεύγος. Τα δύο σύνολα είναι διαφορετικά, αλλά καθένα έχει $2 \cdot 3 = 6$ στοιχεία. Τέλος, $|\emptyset| = 0$ και $|\{\emptyset\}| = 1$.

Λύση 3. Αν $x = 0,272727\dots$, τότε $100x - x = 27$, άρα $x = 27/99 = 3/11$. Αν $y = 2,16666\dots$, τότε $100y - 10y = 216,666\dots - 21,666\dots = 195$, οπότε $y = 195/90 = 13/6$. Και οι δύο αναπτύξεις είναι τελικά περιοδικές.

Λύση 4. Ορίζουμε $g(n) = 2n-1$. Η ισότητα $g(n) = g(m)$ δίνει $2n-1 = 2m-1$, άρα $n = m$, επομένως η g είναι ένα προς ένα. Κάθε θετικός περιττός έχει τη μορφή $2k-1$ με $k \in \mathbb{N}$ και είναι εικόνα του k , επομένως η g είναι επί.

Λύση 5. Έχουμε $f(-4) = 8$, άρα το -4 βρίσκεται στη θέση 8. Επειδή $11 = 2 \cdot 5 + 1$, στη θέση 11 βρίσκεται το 5. Η λίστα $0,1,2,3, \dots$ παραλείπει όλους τους αρνητικούς ακεραίους και επομένως δεν απαριθμεί το $\mathbb{Z}$.

Λύση 6. Για το A έχουμε $\inf A = -2$, χωρίς ελάχιστο, και $\sup A = \max A = 3$. Για το B έχουμε $\inf B = \min B = 0$ και $\sup B = 1$, χωρίς μέγιστο. Πράγματι, κάθε στοιχείο είναι μικρότερο του 1, ενώ για κάθε $\varepsilon > 0$ η Αρχιμήδεια ιδιότητα δίνει n με $1/n < \varepsilon$, άρα $1 - 1/n > 1 - \varepsilon$. Το $C = \mathbb{N}$ έχει $\inf C = \min C = 1$, αλλά δεν έχει άνω φράγμα, supremum στο $\mathbb{R}$ ή μέγιστο.

Λύση 7. Η αυστηρή ανισότητα ισοδυναμεί με $n > 10000$, άρα η μικρότερη τιμή είναι 10001. Για τη μη αυστηρή ανισότητα αρκεί $n \geq 10000$, οπότε η μικρότερη τιμή είναι 10000.

Λύση 8. Για $n = 1$ ισχύει $1 = 1^2$. Αν $1 + 3 + \dots + (2k-1) = k^2$, τότε

$$1 + 3 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Ο όρος $2k+1$ είναι ο επόμενος περιττός, οπότε έχει αποδειχθεί το επαγωγικό βήμα.

Λύση 9. Όλες οι προτάσεις είναι λανθασμένες. Το $\mathbb{R}$ είναι άπειρο και μη αριθμήσιμο. Το $(0,1)$ είναι μη κενό και φραγμένο αλλά δεν έχει μέγιστο. Ο ρητός $1/3$ έχει άπειρη περιοδική ανάπτυξη. Τέλος, το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και συγχρόνως αριθμήσιμο.

Λύση 10. Κάθε $x \in A$ ικανοποιεί $x < 1$, επομένως το 1 είναι άνω φράγμα. Για δοσμένο $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$ και $x = 1 - \delta$. Τότε $0 < \delta \leq 1/2$ και $\delta < \varepsilon$, άρα $x \in (0,1)$ και $x > 1 - \varepsilon$. Συνεπώς, κανένας αριθμός μικρότερος του 1 δεν είναι άνω φράγμα και $\sup A = 1$.

Παράρτημα Η ιδέα της θεμελίωσης των αριθμών

Το παράρτημα δίνει το εννοιολογικό υπόβαθρο των αριθμητικών συνόλων. Μπορεί να μελετηθεί μετά τον βασικό κορμό της διάλεξης, αφού έχουν γίνει κατανοητές οι πράξεις συνόλων και η μαθηματική επαγωγή.

Φυσικοί αριθμοί και αξιώματα του Peano

Μια συνήθης θεμελίωση ξεκινά από το $\mathbb{N}_0$, το 0 και μια συνάρτηση διαδόχου S , που εκφράζει την ιδέα «ο επόμενος αριθμός». Τα βασικά αξιώματα δηλώνουν ότι το 0 είναι φυσικός, ότι κάθε φυσικός έχει διάδοχο, ότι το 0 δεν είναι διάδοχος κανενός φυσικού και ότι ίσοι διάδοχοι προέρχονται από ίσους αριθμούς. Προστίθεται η αρχή της επαγωγής: κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$ που περιέχει το 0 και μαζί με κάθε στοιχείο του περιέχει τον διάδοχό του είναι ολόκληρο το $\mathbb{N}_0$.

Μέσα σε αυτή τη δομή ορίζονται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Αν χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, διατυπώνουμε την αντίστοιχη αρχή επαγωγής με αφετηρία το 1.

Ακέραιοι ως κλάσεις διαφορών

Στο $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ θεωρούμε ότι το ζεύγος (a, b) παριστάνει την τυπική διαφορά $a - b$. Ορίζουμε

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Η διατύπωση χρησιμοποιεί μόνο πρόσθεση φυσικών, χωρίς να προϋποθέτει ότι έχουμε ήδη κατασκευάσει αρνητικούς αριθμούς. Όλα τα ζεύγη που παριστάνουν την ίδια διαφορά τοποθετούνται στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Για παράδειγμα, τα $(3, 1)$, $(4, 2)$ και $(5, 3)$ ανήκουν στην κλάση που αντιστοιχεί στον ακέραιο 2. Το $(1, 3)$ αντιστοιχεί στο -2 και κάθε (a, a) στο 0.

Το σύνολο των ακεραίων κατασκευάζεται ως σύνολο αυτών των κλάσεων:

$$\mathbb{Z} \cong (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) / \sim.$$

Ο συμβολισμός « $/\sim$ » σημαίνει ότι περνάμε από τα ζεύγη στις κλάσεις ισοδυναμίας τους. Το $\cong$ δηλώνει ότι η κατασκευή αναπαριστά τη συνήθη δομή των ακεραίων.

Ρητοί ως κλάσεις κλασμάτων

Ξεκινάμε από ζεύγη (p, q) , όπου $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Θέλουμε τα (p, q) και (r, s) να παριστάνουν τον ίδιο ρητό όταν τα αντίστοιχα κλάσματα είναι ίσα. Ορίζουμε λοιπόν

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = rq.$$

Έτσι, τα $(1, 2)$, $(2, 4)$ και $(-1, -2)$ ανήκουν στην ίδια κλάση. Ο αποκλεισμός του μηδενικού παρονομαστή είναι απαραίτητος. Η κατασκευή γράφεται

$$\mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \sim.$$

Πραγματικοί αριθμοί και τομές Dedekind

Η ιδέα της τομής Dedekind είναι να προσδιορίζουμε έναν αριθμό από όλους τους ρητούς που βρίσκονται αριστερά του. Στην περιγραφή μέσω του κάτω μέρους της, μια τομή είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο L του $\mathbb{Q}$, κλειστό προς τα κάτω και χωρίς μέγιστο. Κλειστό προς τα κάτω σημαίνει ότι αν $q \in L$ και $r < q$ με $r \in \mathbb{Q}$, τότε $r \in L$.

Για έναν ρητό a , το σύνολο $L_a = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$ είναι μια τέτοια τομή. Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των ρητών μικρότερων από το 3 προσδιορίζει τη θέση του 3, χωρίς να περιλαμβάνει το ίδιο το 3.

Για να προσδιορίσουμε τη θέση της $\sqrt{2}$ χωρίς να προϋποθέσουμε την κατασκευή της, χρησιμοποιούμε την τομή

$$L = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ ή } q^2 < 2\}.$$

Το «ή» έχει συμπεριληπτική έννοια: αρκεί να ισχύει μία από τις δύο συνθήκες. Έτσι περιλαμβάνονται όλοι οι αρνητικοί ρητοί, καθώς και το 0 και οι θετικοί ρητοί με τετράγωνο μικρότερο από το 2. Για παράδειγμα, το -5 ανήκει επειδή είναι αρνητικό, παρότι $(-5)^2 = 25$. Το $1,4$ ανήκει επειδή $1,4^2 = 1,96 < 2$. Το $1,5$ δεν ανήκει, επειδή δεν είναι αρνητικό και $1,5^2 = 2,25 > 2$.

Η τομή περιγράφει ακριβώς τους ρητούς αριστερά από τη θέση της $\sqrt{2}$. Δεν έχει μέγιστο: αν $q < 0$, υπάρχει μεγαλύτερος αρνητικός ρητός, ενώ αν $q \geq 0$ και $q^2 < 2$, μπορούμε να επιλέξουμε μικρό θετικό ρητό h ώστε $h < 1$ και $h < (2 - q^2)/(2q + 1)$. Τότε $(q + h)^2 = q^2 + 2qh + h^2 < q^2 + (2q + 1)h < 2$, άρα $q + h \in L$.

Με κατάλληλους ορισμούς πράξεων και διάταξης, το σύνολο των τομών κατασκευάζει τους πραγματικούς αριθμούς. Σε αυτή την προσέγγιση η πληρότητα αποδεικνύεται ως ιδιότητα της κατασκευής. Η τομή Dedekind δεν είναι τομή δύο συνόλων με την έννοια της πράξης $\cap$: εδώ ο όρος περιγράφει έναν διαχωρισμό των ρητών σε κάτω και άνω μέρος.

Η αρχή των εγκιβωτισμένων διαστημάτων

Έστω μια ακολουθία μη κενών, κλειστών και φραγμένων διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $I_{n+1} \subseteq I_n$. Τότε τα διαστήματα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Απόδειξη. Η εγκιβωτισση σημαίνει ότι τα a_n είναι αύξοντα με τη μη αυστηρή έννοια και τα b_n φθίνοντα με τη μη αυστηρή έννοια. Όλα τα άκρα βρίσκονται στο πρώτο διάστημα, επομένως τα σύνολα $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενά και φραγμένα. Από την πληρότητα υπάρχουν οι πραγματικοί αριθμοί

$$\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Για κάθε m, n ισχύει $a_m \leq b_n$. Πράγματι, αν $m \leq n$, τότε $a_m \leq a_n \leq b_n$. Αν $m > n$, τότε $a_m \leq b_m \leq b_n$. Συνεπώς κάθε b_n είναι άνω φράγμα όλων των a_m , άρα $\alpha \leq b_n$ για κάθε n . Έτσι το α είναι κάτω φράγμα του συνόλου των δεξιών άκρων και $\alpha \leq \beta$. Για κάθε n έχουμε λοιπόν

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n.$$

Επομένως και το α και το β ανήκουν σε κάθε I_n , όπως και κάθε σημείο ανάμεσά τους. Αντίστροφα, αν x ανήκει σε όλα τα I_n , τότε $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n . Το x είναι άνω φράγμα των a_n και κάτω φράγμα των b_n , οπότε $\alpha \leq x \leq \beta$. Άρα η κοινή τομή είναι ακριβώς το διάστημα $[\alpha, \beta]$.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [\alpha, \beta] \neq \emptyset.$$

Αν επιπλέον $b_n - a_n \rightarrow 0$, τότε $0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n$ για κάθε n . Αν $\beta - \alpha$ ήταν θετικό, η σύγκλιση των μηκών στο μηδέν θα έδινε κάποιο n με $b_n - a_n < \beta - \alpha$, αντίφαση. Άρα $\alpha = \beta$ και το κοινό σημείο είναι μοναδικό.

Παράδειγμα. Για $I_n = [0, 1/n]$, έχουμε $\alpha = \beta = 0$ και η κοινή τομή είναι $\{0\}$. Η υπόθεση ότι τα διαστήματα είναι κλειστά είναι ουσιαστική: τα ανοικτά διαστήματα $(0, 1/n)$ είναι επίσης εγκιβωτισμένα, αλλά δεν έχουν κοινό σημείο. Χωρίς τη συνθήκη ότι τα μήκη τείνουν στο μηδέν, η τομή μπορεί να είναι ολόκληρο διάστημα, όπως όταν $I_n = [0, 1]$ για κάθε n .

Οι τομές Dedekind και τα εγκιβωτισμένα διαστήματα συνδέονται με την πληρότητα των πραγματικών, αλλά είναι διαφορετικές έννοιες: οι πρώτες χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των αριθμών, ενώ η δεύτερη αρχή αποτελεί θεώρημα στην αξιωματική παρουσίαση.

Πρόσθετες ασκήσεις για τις νέες έννοιες

Άσκηση 11. Εξηγήστε με παραδείγματα την ολικότητα και τη μεταβατικότητα της διάταξης. Από $a \leq b$ τι συμπεραίνουμε για $-3a$ και $-3b$;

Άσκηση 12. Για την τομή $L = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ ή } q^2 < 2\}$, εξετάστε αν ανήκουν οι αριθμοί -5 , 0 , $7/5$ και $3/2$. Αιτιολογήστε κάθε απάντηση.

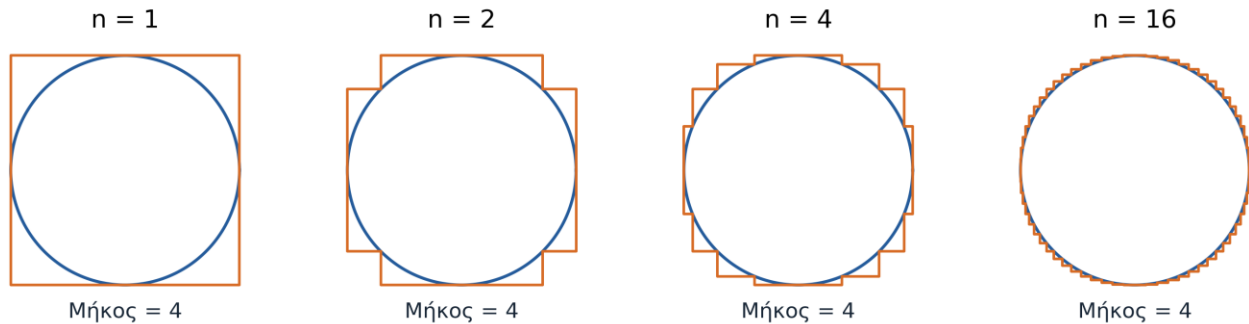
Άσκηση 13. Για $I_n = [-1/n, 1 + 1/n]$, υπολογίστε το supremum των αριστερών άκρων, το infimum των δεξιών και την κοινή τομή. Είναι μοναδικό το κοινό σημείο;

Ενδεικτικές απαντήσεις. 11: Η ολικότητα επιτρέπει τη σύγκριση κάθε ζεύγους πραγματικών και η μεταβατικότητα δίνει $a \leq c$ από $a \leq b \leq c$. Επειδή $-3 < 0$, έχουμε $-3a \geq -3b$. 12: Οι -5 , 0 και $7/5$ ανήκουν, ενώ το $3/2$ δεν ανήκει, αφού $(3/2)^2 = 9/4 > 2$. 13: $\alpha = 0$, $\beta = 1$ και η κοινή τομή είναι $[0, 1]$, επομένως δεν υπάρχει μοναδικό κοινό σημείο.

Η μαθηματική αυστηρότητα στην πράξη

Παράδειγμα 1 Η σκάλα και ο κύκλος

Ξεκινάμε από τετράγωνο πλευράς 1 με εγγεγραμμένο κύκλο ακτίνας $1/2$. Στις γωνίες δημιουργούμε όλο και μικρότερα ορθογώνια σκαλοπάτια, ώστε η τεθλασμένη να πλησιάζει τον κύκλο. Στα σχήματα το n δηλώνει τον αριθμό υποδιαιρέσεων ανά τεταρτημόριο.



Μπλε: ο κύκλος. Πορτοκαλί: η τεθλασμένη. Το σχήμα αλλάζει, αλλά κάθε τεθλασμένη έχει μήκος 4.

Ερώτηση προς τους φοιτητές. Αν η σκάλα πλησιάζει τον κύκλο, περιμένετε και το μήκος της να πλησιάζει την περίμετρο του κύκλου;

Ακριβής υπολογισμός. Σε ένα τεταρτημόριο η τεθλασμένη κινείται μονότονα οριζόντια και κατακόρυφα. Το συνολικό μήκος των οριζόντιων τμημάτων είναι $1/2$ και των κατακόρυφων επίσης $1/2$. Το άθροισμα είναι επομένως 1, ανεξάρτητα από τον αριθμό των σκαλοπατιών. Στα τέσσερα τεταρτημόρια το συνολικό μήκος είναι 4. Αντίθετα, η περίμετρος του κύκλου είναι π .

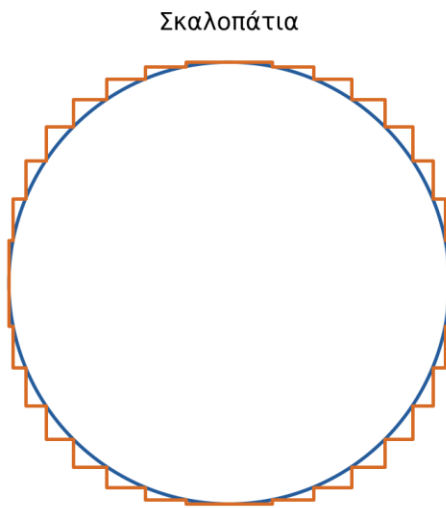
$$L_n = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 4, \quad C = 2\pi \frac{1}{2} = \pi.$$

Η οπτική προσέγγιση είναι πραγματική. Επιλέγουμε σημεία του κύκλου με ίσες γωνιακές αποστάσεις $\pi/(2n)$ και ενώνουμε κάθε διαδοχικό ζεύγος με ένα κατακόρυφο και ένα οριζόντιο τμήμα, όπως στο σχήμα. Κάθε σκαλοπάτι και το αντίστοιχο τόξο βρίσκονται στο ίδιο μικρό ορθογώνιο. Η διάμετρος αυτού του ορθογωνίου ισούται με το μήκος της αντίστοιχης χορδής και τείνει στο μηδέν. Άρα η μεταξύ τους απόσταση μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε.

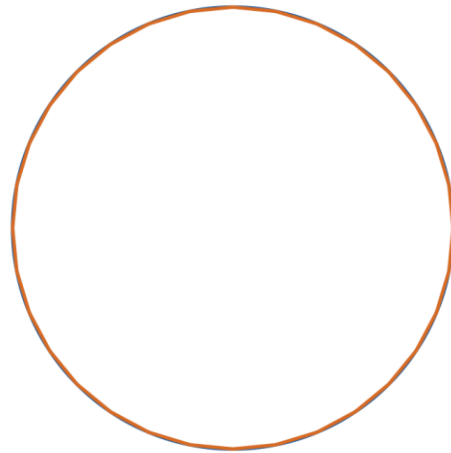
$$\delta_n = \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) \rightarrow 0.$$

Το μη δικαιολογημένο βήμα θα ήταν να συμπεράνουμε ότι το μήκος του ορίου ισούται με το όριο των μηκών. Η προσέγγιση της θέσης των καμπυλών δεν αρκεί για να διατηρήσει το μήκος. Δεν προκύπτει ότι $\pi = 4$. Προκύπτει ότι αυτή η μετάβαση στο όριο είναι λανθασμένη.

Σύγκριση με την προσέγγιση μέσω χορδών



Ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ σημείων του κύκλου



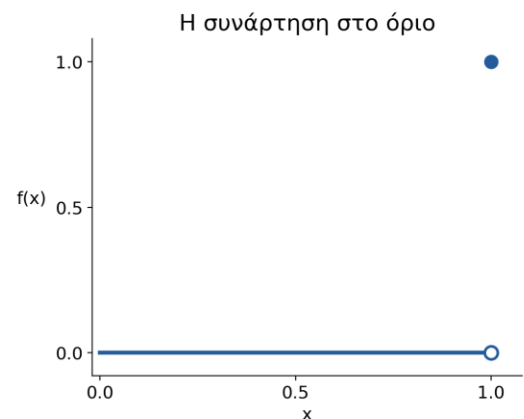
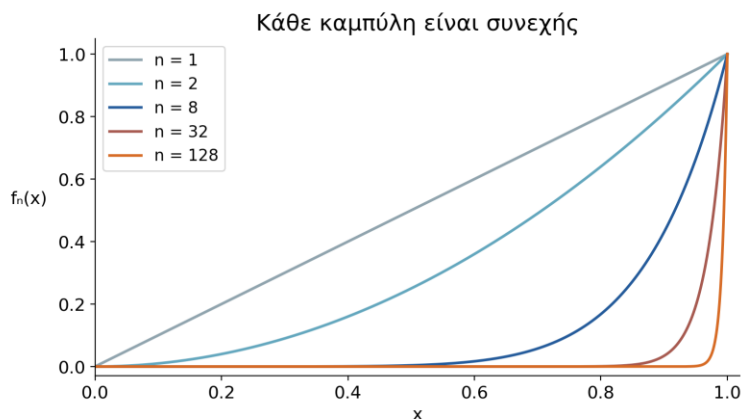
Αν ενώνουμε τα ίδια διαδοχικά σημεία του κύκλου απευθείας με ευθύγραμμα τμήματα, παίρνουμε εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο με $4n$ πλευρές. Κάθε πλευρά έχει μήκος $\sin(\pi/(4n))$. Αυτή η συγκεκριμένη κατασκευή δίνει περίμετρο που πράγματι συγκλίνει στο π .

$$P_n = 4n \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \pi \frac{\sin(\pi/(4n))}{\pi/(4n)} \rightarrow \pi.$$

Το τελευταίο συμπέρασμα χρησιμοποιεί το όριο $\sin t / t \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow 0$, το οποίο θα τεκμηριώσουμε όταν μελετήσουμε τα όρια. Δύο οικογένειες καμπυλών πλησιάζουν τον ίδιο κύκλο, αλλά έχουν διαφορετικά όρια μηκών.

Παράδειγμα 2 Συνεχείς συναρτήσεις με ασυνεχές όριο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = x^n$ στο διάστημα $[0,1]$. Για κάθε φυσικό n η συνάρτηση f_n είναι συνεχής. Το ερώτημα είναι αν η συνάρτηση που προκύπτει ως όριο παραμένει συνεχής.



Αριστερά φαίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις για διαδοχικές τιμές του n . Δεξιά φαίνεται το κατά σημείο όριο: η ανοικτή κουκκίδα στο $(1,0)$ δεν ανήκει στο γράφημα, ενώ η γεμάτη κουκκίδα στο $(1,1)$ ανήκει.

Για κάθε σταθερό x με $0 \leq x < 1$ έχουμε $x^n \rightarrow 0$. Στο $x = 1$, όμως, έχουμε $x^n = 1$ για κάθε n . Συνεπώς η οριακή συνάρτηση είναι 0 στο $[0,1)$ και παίρνει την τιμή 1 στο δεξί άκρο. Είναι ασυνεχής στο 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x < 1), \quad f_n(1) = 1.$$

Η διαφορά ανάμεσα σε ένα σταθερό και σε ένα κινούμενο σημείο φαίνεται αν επιλέξουμε την ακόλουθη ακολουθία:

$$x_n = 2^{-1/n} \rightarrow 1, \quad x_n < 1, \quad f_n(x_n) = \frac{1}{2}, \quad f(x_n) = 0.$$

Για κάθε n υπάρχει λοιπόν σημείο x_n στο οποίο η απόκλιση από την οριακή συνάρτηση παραμένει $1/2$. Η σύγκλιση σε κάθε σταθερό σημείο χωριστά δεν εξασφαλίζει ότι οι συναρτήσεις πλησιάζουν την οριακή συνάρτηση ταυτόχρονα σε όλο το διάστημα. Μια επαρκής πρόσθετη υπόθεση είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση: το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχές. Θα δώσουμε τους ακριβείς ορισμούς όταν μελετήσουμε τη σύγκλιση συναρτήσεων.

Παράδειγμα 3 Άθροισμα σειράς άπειρων όρων

Σε ένα πεπερασμένο άθροισμα μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των όρων χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα. Είναι φυσικό να περιμένουμε ότι το ίδιο θα ισχύει και όταν οι όροι είναι άπειροι. Η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά δείχνει ότι αυτή η προσδοκία χρειάζεται πρόσθετες υποθέσεις.

Η αρχική σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2 \approx 0,693147.$$

Οι απόλυτες τιμές των όρων μειώνονται και τείνουν στο μηδέν. Η σειρά λοιπόν συγκλίνει από το κριτήριο των εναλλασσόμενων σειρών. Το άθροισμά της είναι $\ln 2$. Αν όμως πάρουμε τις απόλυτες τιμές, προκύπτει η αρμονική σειρά, η οποία αποκλίνει. Λέμε επομένως ότι η αρχική σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, ή ότι είναι υπό συνθήκη συγκλίνουσα.

Η αναδιάταξη

Κρατάμε τους ίδιους ακριβώς όρους. Παίρνουμε διαδοχικά έναν θετικό όρο και δύο αρνητικούς, διατηρώντας τη σειρά μέσα σε καθεμία από τις δύο ομάδες:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Οι θετικοί όροι εμφανίζονται με παρονομαστές 1, 3, 5, ... και οι αρνητικοί με παρονομαστές 2, 4, 6, 8, ... Κάθε όρος της αρχικής σειράς εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Δεν προσθέσαμε ούτε αφαιρέσαμε κανέναν όρο.

Παρόλα αυτά, η νέα σειρά έχει διαφορετικό άθροισμα:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,346574.$$

Απόδειξη (για τη σύγκλιση της παραπάνω σειράς)

Βήμα 1 — μια ταυτότητα, όχι μια σειρά

Για κάθε $t \neq -1$ και κάθε $n \geq 1$, το πεπερασμένο γεωμετρικό άθροισμα με λόγο $-t$ δίνει:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-1)^n t^n}{1 + t}$$

Λύνοντας ως προς $1/(1+t)$ προκύπτει η ταυτότητα:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

Προσοχή στο σημείο αυτό: πρόκειται για αλγεβρική ταυτότητα με πεπερασμένο πλήθος όρων και ρητό υπόλοιπο. Ισχύει για κάθε $t \neq -1$, χωρίς καμία υπόθεση σύγκλισης και χωρίς να εμφανίζεται πουθενά άπειρη σειρά. Εδώ ακριβώς βρίσκεται η διαφορά της από το «ανάπτυγμα σε σειρά», που συζητάμε στην ενότητα 6.

Βήμα 2 — ολοκλήρωση στο $[0, 1]$

Και τα δύο μέλη είναι συνεχείς συναρτήσεις του t στο $[0, 1]$. Ολοκληρώνουμε· η εναλλαγή αθροίσματος και ολοκληρώματος εδώ είναι απλώς η γραμμικότητα του ολοκληρώματος για πεπερασμένο πλήθος προσθετέων — δεν επικαλούμαστε κανένα θεώρημα σύγκλισης:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

Το αριστερό μέλος ισούται με $\ln 2$ (όπως στην ενότητα 3). Για τα ολοκληρώματα της δεξιάς πλευράς ισχύει $\int_0^1 t^k dt = 1/(k+1)$, οπότε το πεπερασμένο άθροισμα γίνεται ακριβώς το μερικό άθροισμα S_n . Θέτοντας R_n για το τελευταίο ολοκλήρωμα παίρνουμε την κεντρική ταυτότητα:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n R_n = S_n + (-1)^n R_n, \quad R_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

Βήμα 3 — φράγμα του υπολοίπου

Για $t \in [0, 1]$ ισχύει $1 \leq 1+t \leq 2$, άρα $t^n/2 \leq t^n/(1+t) \leq t^n$. Ολοκληρώνοντας τις ανισότητες αυτές στο $[0, 1]$ και χρησιμοποιώντας $\int_0^1 t^n dt = 1/(n+1)$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Ειδικότερα το R_n είναι γνησίως θετικό και φραγμένο:

$$0 < R_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Βήμα 4 — συμπέρασμα

Από την κεντρική ταυτότητα του Βήματος 2, το σφάλμα του n -οστού μερικού αθροίσματος είναι ακριβώς R_n κατ' απόλυτη τιμή:

$$|\ln 2 - S_n| = R_n \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Με το κριτήριο της παρεμβολής, $R_n \rightarrow 0$, άρα $S_n \rightarrow \ln 2$.

Γιατί το δεύτερο άθροισμα γίνεται το μισό

Χωρίζουμε τη νέα σειρά σε διαδοχικές τριάδες. Η k -οστή τριάδα περιέχει τον k -οστό θετικό όρο και τους δύο επόμενους αρνητικούς. Για κάθε φυσικό k ισχύει η πεπερασμένη αλγεβρική ταυτότητα:

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right).$$

Η ταυτότητα είναι νόμιμη: αφορά μόνο τρεις όρους. Έστω S_{2m} το άθροισμα των πρώτων $2m$ όρων της αρχικής σειράς και T_{3m} το άθροισμα των πρώτων $3m$ όρων της αναδιατεταγμένης σειράς. Αθροίζοντας τις πρώτες m τριάδες, παίρνουμε ακριβώς:

$$T_{3m} = \frac{1}{2} S_{2m}.$$

Επειδή τα μερικά αθροίσματα S_{2m} συγκλίνουν στο $\ln 2$, τα μερικά αθροίσματα T_{3m} συγκλίνουν στο μισό του:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_{3m} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Απομένει ένα μικρό αλλά ουσιαστικό βήμα: τα T_{3m} είναι μόνο τα μερικά αθροίσματα που τελειώνουν σε πλήρη τριάδα. Για να αποδείξουμε τη σύγκλιση ολόκληρης της σειράς, εξετάζουμε και τις άλλες δύο περιπτώσεις:

$$T_{3m+1} = T_{3m} + \frac{1}{2m+1},$$

$$T_{3m+2} = T_{3m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{4m+2}.$$

Οι επιπλέον όροι τείνουν στο μηδέν. Άρα και οι τρεις υποακολουθίες των μερικών αθροισμάτων έχουν το ίδιο όριο, και η νέα σειρά πράγματι συγκλίνει στο $\frac{1}{2} \ln 2$.

Ποιο βήμα θα ήταν λανθασμένο

Δεν είναι ακριβές να πούμε ότι «η αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης δεν επιβιώνει στο άπειρο». Η αντιμεταθετικότητα εξακολουθεί να ισχύει για την πρόσθεση πραγματικών αριθμών και για κάθε πεπερασμένο άθροισμα. Μια άπειρη σειρά όμως ορίζεται ως όριο μερικών αθροισμάτων. Η αναδιάταξη αλλάζει αυτά τα μερικά αθροίσματα και μπορεί να αλλάξει το όριό τους.

Το θεώρημα αναδιάταξης του Riemann

Το παράδειγμα δεν περιορίζεται στα δύο αθροίσματα $\ln 2$ και $\frac{1}{2} \ln 2$. Το θεώρημα αναδιάταξης του Riemann δηλώνει ότι, για κάθε υπό συνθήκη (η σειρά συγκλίνει αλλά η αντίστοιχη σειρά απολύτων αποκλίνει) συγκλίνουσα σειρά πραγματικών αριθμών και για κάθε πραγματικό αριθμό A , υπάρχει αναδιάταξη που συγκλίνει στο A . Υπάρχουν επίσης αναδιατάξεις των οποίων τα μερικά αθροίσματα τείνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, καθώς και αναδιατάξεις που δεν έχουν ούτε πεπερασμένο ούτε άπειρο όριο.

Επομένως μπορούμε να αναδιατάξουμε τους όρους της ίδιας εναλλάσσουσας αρμονικής σειράς ώστε να προκύψει, για παράδειγμα, άθροισμα 0 , 1 , -3 ή 100 . Τα $+\infty$ και $-\infty$ περιγράφουν απόκλιση προς το αντίστοιχο άπειρο, όχι σύγκλιση σε πραγματικό άθροισμα.

Η ιδέα της κατασκευής

Οι θετικοί όροι έχουν άπειρο συνολικό άθροισμα, ενώ οι αρνητικοί έχουν άθροισμα που τείνει στο $-\infty$. Για έναν επιθυμητό στόχο A , παίρνουμε διαδοχικούς, αχρησιμοποίητους θετικούς όρους μέχρι το μερικό άθροισμα να υπερβεί το A . Έπειτα παίρνουμε διαδοχικούς, αχρησιμοποίητους αρνητικούς όρους μέχρι να πέσει κάτω από το A . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Κάθε πέρασμα πάνω ή κάτω από τον στόχο έχει απόκλιση το πολύ ίση με την απόλυτη τιμή του τελευταίου όρου που προσθέσαμε. Οι όροι τείνουν στο μηδέν, οπότε οι υπερβάσεις γίνονται όλο και μικρότερες. Αν ο στόχος είναι ήδη ίσος με το αρχικό μερικό άθροισμα, ξεκινάμε με έναν θετικό όρο. Καταναλώνουμε τους όρους κάθε προσήμου με τη σειρά και περνάμε τον στόχο άπειρες φορές, άρα τελικά χρησιμοποιούμε κάθε όρο ακριβώς μία φορά. Έτσι προκύπτει αναδιάταξη που συγκλίνει στο A .

Πότε οι αναδιατάξεις είναι ασφαλείς

Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, δηλαδή αν συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών των όρων της, τότε κάθε αναδιάταξη συγκλίνει στο ίδιο άθροισμα. Η απόλυτη σύγκλιση είναι η υπόθεση που επιτρέπει την ελεύθερη αλλαγή της σειράς των όρων.

Τι μας διδάσκουν τα παραδείγματα

Οι εικόνες και τα παραδείγματα καθοδηγούν τη σκέψη μας. Για να περάσουμε από μια εικόνα σε ένα συμπέρασμα, προσδιορίζουμε το αντικείμενο που συγκλίνει, το είδος σύγκλισης και τις υποθέσεις που επιτρέπουν να διατηρηθεί η ιδιότητα που εξετάζουμε. Το άπειρο δεν είναι ένα τελευταίο πεπερασμένο στάδιο. Η μαθηματική αυστηρότητα ελέγχει ακριβώς αυτή τη μετάβαση.