

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

1η Διάλεξη

Σύνολα και πραγματικοί αριθμοί



Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών · Τμήμα Στατιστικής

Γιατί χρειαζόμαστε μαθηματική αυστηρότητα

Η διαίσθηση μας βοηθά να αναγνωρίζουμε σχέσεις και να διατυπώνουμε εικασίες.

Για να τις δεχθούμε ως μαθηματικά συμπεράσματα χρειαζόμαστε σαφείς ορισμούς, ακριβείς υποθέσεις και αποδείξεις.

**Μια ιδιότητα που ισχύει σε κάθε πεπερασμένο στάδιο
δεν μεταφέρεται αυτόματα στο όριο.**

Στο τέλος της διάλεξης: τρία παραδείγματα όπου η εικόνα λέει κάτι και η απόδειξη κάτι άλλο.

Τι θα μπορούμε να κάνουμε μετά τη διάλεξη

Πράξεις συνόλων

ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα, καρτεσιανό γινόμενο

Δεκαδικές αναπτύξεις

μετατροπή περιοδικού δεκαδικού σε ανάγωγο κλάσμα

Αριθμησιμότητα

γιατί $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ αριθμούνται και το $\mathbb{R}$ όχι

Μέγιστο $\neq$ supremum

πότε το ελάχιστο άνω φράγμα ανήκει στο σύνολο

Αξίωμα πληρότητας

απόδειξη της Αρχιμήδειας ιδιότητας και των εγκιβωτισμένων διαστημάτων

Μαθηματική επαγωγή

βάση και επαγωγικό βήμα, και γιατί χρειάζονται και τα δύο

Συμβάσεις συμβολισμού

Φυσικοί αριθμοί

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Υποσύνολα

$\subseteq$ επιτρέπει την ισότητα

$\subsetneq$ γνήσιο υποσύνολο

Αριθμήςιμο

περιλαμβάνει και τα πεπερασμένα σύνολα

«αριθμησίμως άπειρο» όταν χρειάζεται έμφαση

Το σύμβολο «:» διαβάζεται «όπου» ή «τέτοιο ώστε»

Κάθε βιβλίο έχει τις δικές του συμβάσεις. Αυτές είναι οι δικές μας για όλο το εξάμηνο.

1

Η γλώσσα των συνόλων

Σύνολα, στοιχεία, υποσύνολα, πληθικός αριθμός

Τι είναι σύνολο

«Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά
διά της εμπειρίας ή της διανόησής μας, είναι καλώς ορισμένα
και διακρίνονται ευκρινώς μεταξύ τους.» — Georg Cantor

✓ Ορίζει σύνολο

«οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι από το 10»

Η συμμετοχή κάθε αντικειμένου κρίνεται χωρίς ασάφεια.

✗ Δεν ορίζει σύνολο

«οι μεγάλοι φυσικοί αριθμοί»

Πρέπει πρώτα να ορίσουμε τι σημαίνει «μεγάλοι».

«Καλώς ορισμένη» σημαίνει ότι η ιδιότητα δεν αφήνει περιθώριο αμφιβολίας.

Δύο τρόποι να περιγράψουμε ένα σύνολο

Με αναγραφή των στοιχείων

$$A = \{3, 7, 11\}$$

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

Με κοινή ιδιότητα

$$E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ άρτιος}\}$$

$x \in A$ το x είναι στοιχείο του A $x \notin A$ δεν είναι

Σειρά και επαναλήψεις δεν μετρούν

$$\{3, 7, 11\} = \{11, 3, 7\} = \{3, 3, 7, 11\}$$

Προσοχή στο κενό σύνολο

$\emptyset$ δεν έχει κανένα στοιχείο

$\{\emptyset\}$ έχει ένα στοιχείο: το $\emptyset$

Υποσύνολα, ισότητα, πληθικός αριθμός

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα, αποδεικνύουμε χωριστά ότι το καθένα περιέχεται στο άλλο

Στοιχείο $\neq$ υποσύνολο

Αν $A = \{3, 7, 11\}$:

$3 \in A$ το 3 είναι στοιχείο

$\{3\} \subseteq A$ το $\{3\}$ είναι σύνολο

$\{3\} \notin A$ δεν είναι στοιχείο

Πληθικός αριθμός $|A|$

$|\{3, 7, 11\}| = 3$

$|\emptyset| = 0$

$|\{\emptyset\}| = 1$

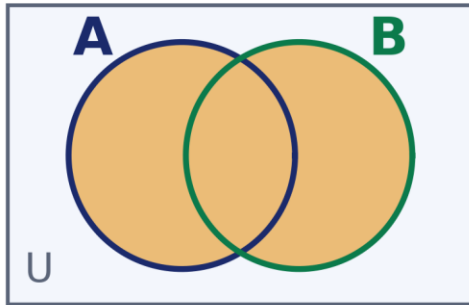
Άπειρα σύνολα: σύγκριση με αντιστοιχίσεις.

2

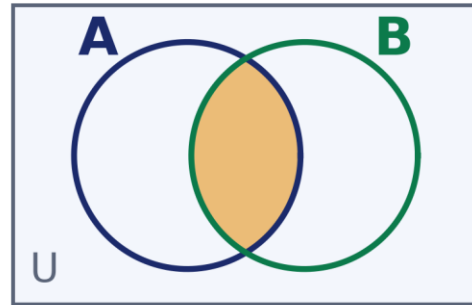
Πράξεις μεταξύ συνόλων

Ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα, καρτεσιανό γινόμενο

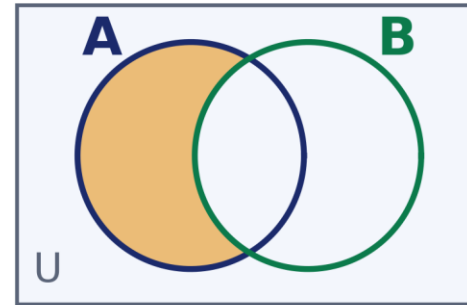
Οι τέσσερις βασικές πράξεις



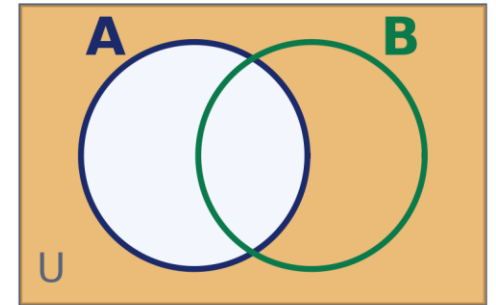
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



A^c

$A \cup B$

$x \in A \text{ ή } x \in B$

$A \cap B$

$x \in A \text{ και } x \in B$

$A \setminus B$

$x \in A \text{ και } x \notin B$

$A^c = U \setminus A$

$x \in U \text{ και } x \notin A$

Το «ή» της ένωσης είναι συμπεριληπτικό. Δύο σύνολα λέγονται ξένα όταν $A \cap B = \emptyset$.

Παράδειγμα με αριθμούς

$$U = \{1, \dots, 8\} \quad A = \{1, 2, 3, 5\} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B$$

$$\{3, 5\}$$

$$A \setminus B$$

$$\{1, 2\}$$

$$B \setminus A$$

$$\{4, 6\}$$

$$A^c$$

$$\{4, 6, 7, 8\}$$

Προσοχή

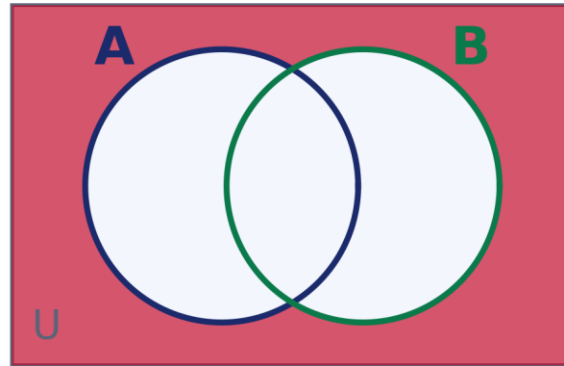
$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad 6 = 4 + 4 - 2$$

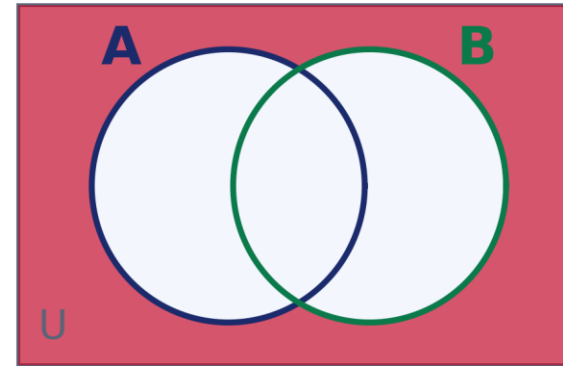
Στην πρόσθεση $|A| + |B|$ κάθε κοινό στοιχείο μετρείται δύο φορές.

Οι νόμοι του De Morgan

Ίδια σκιασμένη περιοχή



$(A \cup B)^c$



$A^c \cap B^c$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Απόδειξη με στοιχεία: το x δεν ανήκει στην ένωση ακριβώς όταν δεν ανήκει ούτε στο A ούτε στο B — δηλαδή όταν ανήκει και στα δύο συμπληρώματα.

Καρτεσιανό γινόμενο

Διατεταγμένο ζεύγος

$$(a, b) = (c, d)$$

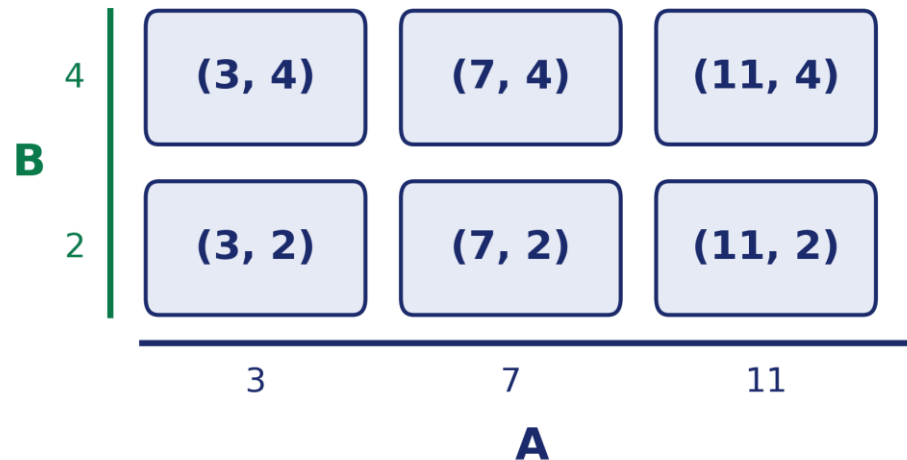
ακριβώς όταν $a = c$ και $b = d$

Προσοχή

$$(2, 4) \neq (4, 2)$$

$$\text{αλλά } \{2, 4\} = \{4, 2\}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$$



Ορισμός

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Το επίπεδο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

η γραφική παράσταση της f είναι
τα $(x, f(x))$

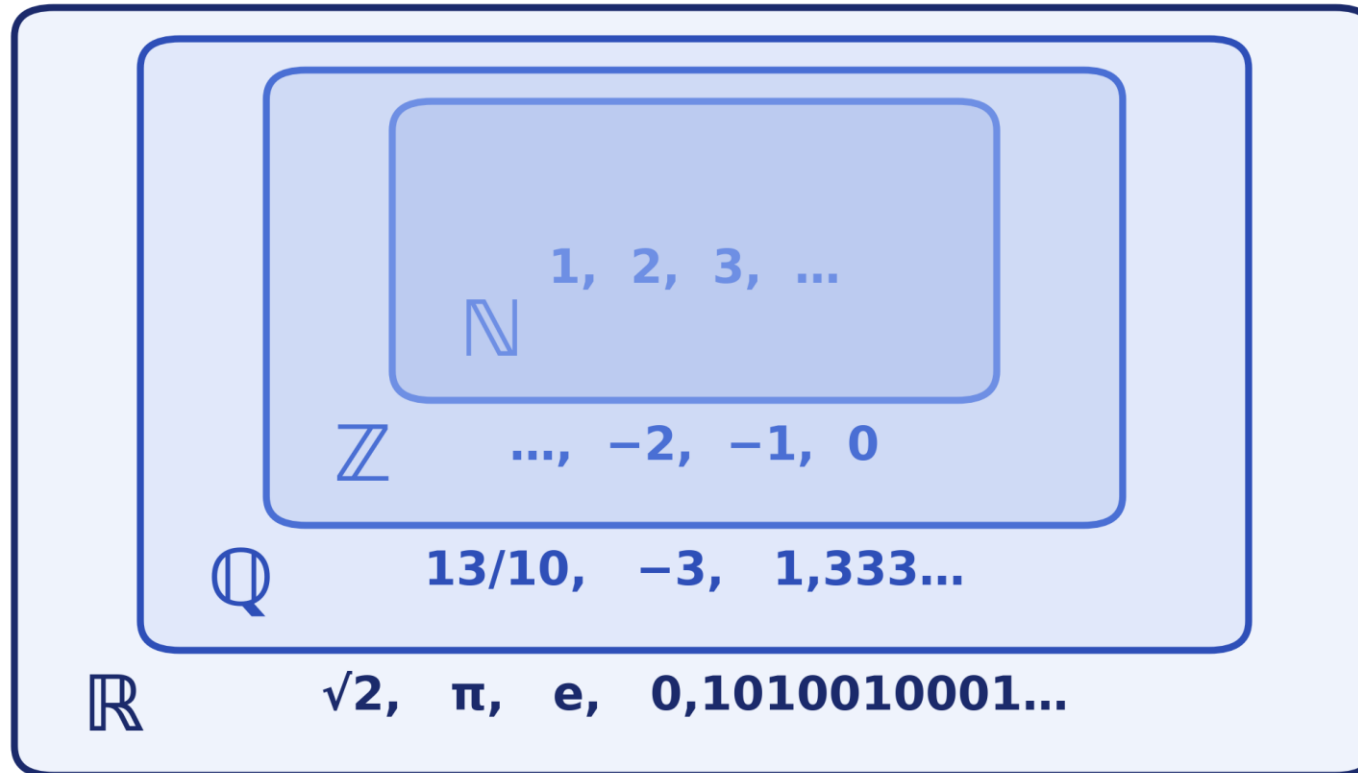
Αργότερα: η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν είναι «εικόνα» — είναι σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

3

Τα βασικά αριθμητικά σύνολα

Από τους φυσικούς στους πραγματικούς — και τι προσθέτει κάθε βήμα

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$



$\mathbb{N}$

απαρίθμηση

$\mathbb{Z}$

αφαίρεση χωρίς να βγούμε από το σύνολο

$\mathbb{Q}$

διαίρεση με μη μηδενικό αριθμό

$\mathbb{R}$

αριθμοί όπως η $\sqrt{2}$ — και η πληρότητα

Κάθε ακέραιος είναι ρητός, αφού $z = z/1$.

Το $\mathbb{R}$ ως πλήρες διατεταγμένο σώμα

1 · Αξιώματα πράξεων

αντιμεταθετικότητα
προσεταιριστικότητα
ουδέτερα 0 και 1
αντίθετο και αντίστροφο
επιμεριστική ιδιότητα

→ σώμα

2 · Αξιώματα διάταξης

ανακλαστική
αντισυμμετρική
ολική
μεταβατική
συμβατή με τις πράξεις

→ διατεταγμένο σώμα

3 · Αξίωμα πληρότητας

κάθε μη κενό και άνω φραγμένο
υποσύνολο έχει ελάχιστο άνω
φράγμα

→ πλήρες διατεταγμένο σώμα

**Οι ομάδες 1 και 2 ισχύουν και για τους ρητούς.
Μόνο η 3 ξεχωρίζει το $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{Q}$.**

Αυτή είναι η ιδιότητα που εξασφαλίζει ότι η πραγματική ευθεία δεν έχει τα κενά των ρητών.

Αξιώματα της διάταξης

Ολική

για κάθε a, b ισχύει $a \leq b$ ή $b \leq a$

τα 3 και 5 συγκρίνονται: $3 \leq 5$

Μεταβατική

$a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

από $2 \leq 4$ και $4 \leq 7$ παίρνουμε $2 \leq 7$

Συμβατή με +

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

για κάθε c

Συμβατή με ·

$c \geq 0$: $ac \leq bc$ $c < 0$: $ac \geq bc$

από $2 \leq 5$ και $c = -2$ παίρνουμε $-4 \geq -10$

Η αντιστροφή της φοράς κατά τον πολλαπλασιασμό με αρνητικό είναι το σημείο που ξεχνιέται πιο συχνά.

4

Ρητοί και δεκαδικές αναπτύξεις

Το κριτήριο της περιοδικότητας και η μετατροπή σε κλάσμα

Το κριτήριο

Ένας πραγματικός είναι ρητός $\Leftrightarrow$
η δεκαδική του ανάπτυξη είναι πεπερασμένη ή τελικά περιοδική

Πεπερασμένη

$$1,3 = 13/10$$

$$-0,125 = -1/8$$

Τελικά περιοδική

$$1,333... = 4/3$$

$$0,272727... = 3/11$$

Ούτε το ένα ούτε το άλλο

$$\sqrt{2} = 1,41421356...$$

$$\pi = 3,14159265...$$

Το κρίσιμο χαρακτηριστικό είναι η περιοδικότητα — όχι το αν τα ψηφία συνεχίζονται επ' άπειρον.

Μετατροπή περιοδικού δεκαδικού σε κλάσμα

Παράδειγμα 4

$$x = 1,3333... \qquad 10x = 13,3333...$$

$$\text{Αφαιρούμε κατά μέλη: } 9x = 12 \implies x = 4/3$$

Γιατί δουλεύει

Οι δύο αριθμοί έχουν ακριβώς το ίδιο άπειρο δεκαδικό τμήμα, οπότε η αφαίρεση το εξαφανίζει.

Γενικός κανόνας

m μη περιοδικά ψηφία, περίοδος μήκους k :
αφαιρούμε τις εξισώσεις για $10^{(m+k)} \cdot x$ και $10^m \cdot x$.
Συντελεστής: $10^m (10^k - 1)$

Παράδειγμα 5 — ο αριθμός $\rho = 7,452\ 37\ 37\ 37\ \dots$

$m = 3$ μη περιοδικά ψηφία, $k = 2$ ψηφία περιόδου $\rightarrow$ συντελεστής $10^3 (10^2 - 1)$

$$\rho = 7,452\ 37\ 37\ 37\ \dots$$

$$100\ 000\ \rho = 745\ 237,373737\ \dots$$

$$- 1\ 000\ \rho = 7\ 452,373737\ \dots$$

$$99\ 000\ \rho = 745\ 237 - 7\ 452 = 737\ 785$$

$$\rho = 737\ 785 / 99\ 000 = 147\ 557 / 19\ 800$$

Το περιοδικό μέρος απαλείφεται με την αφαίρεση

Καθαρός Περιοδικός Δεκαδικός → Κλάσμα

$$0,\overline{a_1a_2\dots a_n} = \frac{a_1a_2\dots a_n}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ εννιάρια}}}$$

$$0,\overline{375} = 0,375375375\dots$$

$$0,\overline{375} = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$$

Ο κανόνας σε μία φράση Στον αριθμητή η περίοδος — στον παρονομαστή τόσα θάρια όσα τα ψηφία της.

Μια λεπτομέρεια – Ένα Παράδοξο !

Ένας αριθμός μπορεί να έχει δύο δεκαδικές αναπτύξεις,
π.χ. $1 = 0,999\dots$

Παράδειγμα 6 — η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο

- 1 Υποθέτουμε $\sqrt{2} = p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$ και το κλάσμα ανάγωγο.
- 2 Τότε $p^2 = 2q^2$, άρα το p^2 είναι άρτιο.
- 3 Επομένως το p είναι άρτιο — το τετράγωνο κάθε περιττού είναι περιττό.
- 4 Γράφουμε $p = 2r$ και παίρνουμε $q^2 = 2r^2$, οπότε και το q είναι άρτιο.
- 5 **Αντίφαση: το p/q ήταν ανάγωγο.**

Προσοχή: τα πρώτα ψηφία μιας ανάπτυξης δεν αρκούν ποτέ για να αποφασίσουμε αν ένας αριθμός είναι άρρητος.

5

Πεπερασμένα, αριθμήσιμα, μη αριθμήσιμα

Πώς συγκρίνουμε μεγέθη άπειρων συνόλων

Αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

Ένα προς ένα (1–1)

διαφορετικά στοιχεία του A έχουν διαφορετικές εικόνες

Επί

κάθε στοιχείο του B εμφανίζεται ως εικόνα

Και τα δύο μαζί $\Rightarrow$ τα A και B έχουν την ίδια ισχύ

Πεπερασμένο

αντιστοιχία με $\{1, 2, \dots, n\}$

Αριθμησίμως άπειρο

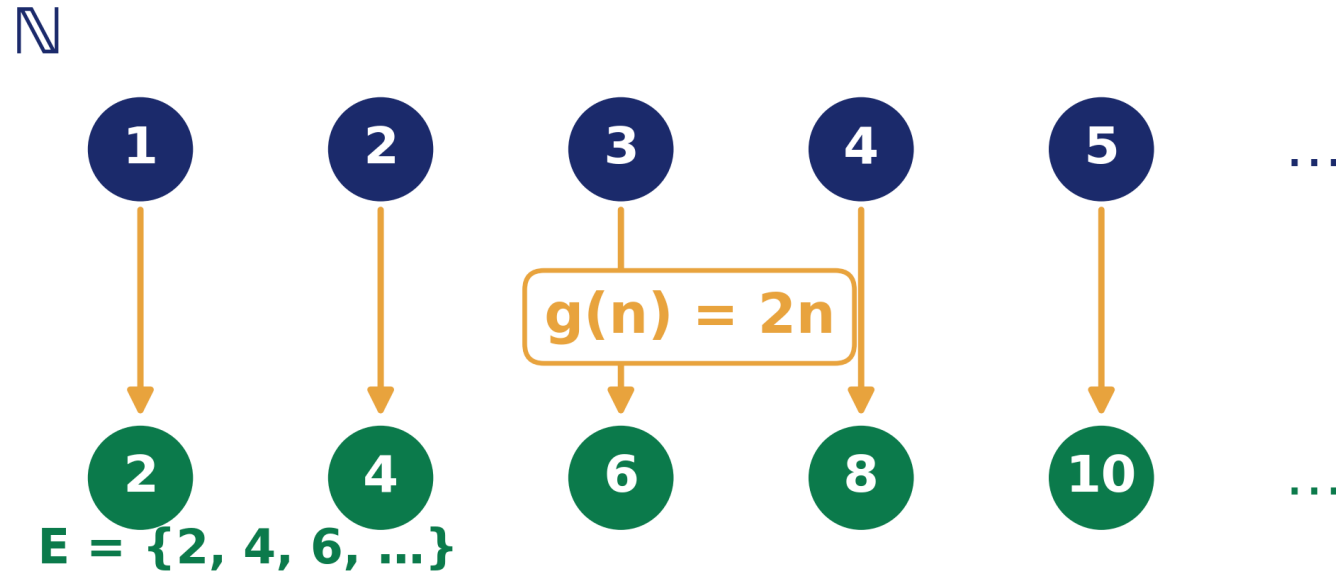
αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$

Μη αριθμήσιμο

καμία τέτοια αντιστοιχία

Αριθμησίμως άπειρο σημαίνει: μπορούμε να γράψουμε όλα τα στοιχεία σε λίστα $a_1, a_2, a_3, \dots$ χωρίς παραλείψεις και χωρίς επαναλήψεις.

Το μέρος μπορεί να είναι «ίσο» με το όλο

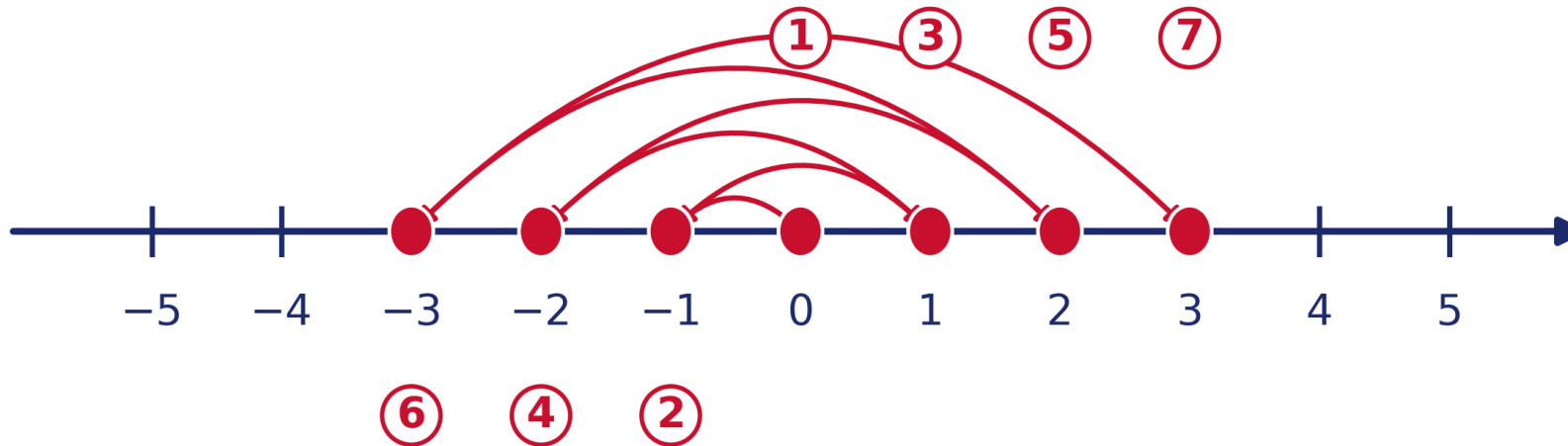


**Το $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$
και έχει την ίδια ισχύ**

Πρόκειται για χαρακτηριστική ιδιότητα των άπειρων συνόλων: κανένα πεπερασμένο σύνολο δεν συμπεριφέρεται έτσι.

Οι ακέραιοι είναι αριθμησίμως άπειροι

$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$



$$f(z) = 2z + 1 \quad (z \geq 0)$$

$$f(z) = -2z \quad (z < 0)$$

1-1

Ίδιος κλάδος $\rightarrow$ ισότητα· διαφορετικοί κλάδοι $\rightarrow$ περιττό $\neq$ άρτιο.

Επί

n περιττός: $n = f((n-1)/2)$. n άρτιος: $n = f(-n/2)$.

Οι ρητοί είναι επίσης αριθμησίμως άπειροι

Ταξινόμηση κατά αυξανόμενο $p + q$

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

Κρατάμε μόνο τα ανάγωγα → κάθε θετικός ρητός μία φορά

Ταξινομούμε τα ζεύγη (p, q) κατά αυξανόμενο άθροισμα $p + q$ και, μέσα σε κάθε ομάδα, κατά αυξανόμενο p .

Κρατάμε μόνο τα ανάγωγα κλάσματα, ώστε κάθε θετικός ρητός να εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Προσθέτοντας το 0 και εναλλάσσοντας πρόσημα παίρνουμε όλο το $\mathbb{Q}$:

0, r_1 , $-r_1$, r_2 , $-r_2$, r_3 , ...

Η πυκνότητα δεν εμποδίζει

Ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει πάντα άλλος — κι όμως το $\mathbb{Q}$ αριθμείται.

Η διαγώνια απόδειξη του Cantor

Αν $d_{nn} = 1 \rightarrow$ βάζουμε 2 αλλιώς $\rightarrow$ βάζουμε 1

x_1	0,	3	1	4	1	5	9	2
x_2	0,	5	0	0	0	0	0	0
x_3	0,	1	6	1	0	0	0	0
x_4	0,	7	3	2	0	5	0	8
x_5	0,	2	7	1	8	2	8	1

y 0, 1 1 2 1 1

Ο y διαφέρει από κάθε x_n στο n -οστό ψηφίο

Το $(0, 1)$ και άρα το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο

Δύο διαφορετικά άπειρα

Η διαγώνιος δεν δείχνει ότι «δεν προλαβαίνουμε να τα μετρήσουμε». Δείχνει ότι καμία λίστα δεν μπορεί να τα περιέχει όλα.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

Το σύνολο των αρρήτων είναι επίσης μη αριθμήσιμο: αν ήταν αριθμήσιμο, συνδυάζοντάς το με το $\mathbb{Q}$ θα απαριθμούσαμε όλο το $\mathbb{R}$.

6

Διαστήματα, φράγματα, πληρότητα

Το αξίωμα που ξεχωρίζει το $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{Q}$

Διαστήματα της πραγματικής ευθείας

(a, b)



$[a, b]$



$[a, b)$



$[a, +\infty)$



Τα $\pm\infty$ δεν είναι αριθμοί

Στα αντίστοιχα άκρα
χρησιμοποιούμε πάντα
παρένθεση:

$[a, +\infty)$ $(-\infty, b)$

Εκφυλισμένες περιπτώσεις

$[a, a] = \{a\}$

$(a, a) = \emptyset$

Φράγματα, supremum, μέγιστο

Άνω φράγμα

$M \in \mathbb{R}$ με $x \leq M$ για κάθε $x \in A$

Supremum $\sup A$

το μικρότερο από όλα τα άνω φράγματα

Μέγιστο $\max A$

άνω φράγμα που ΑΝΗΚΕΙ στο A

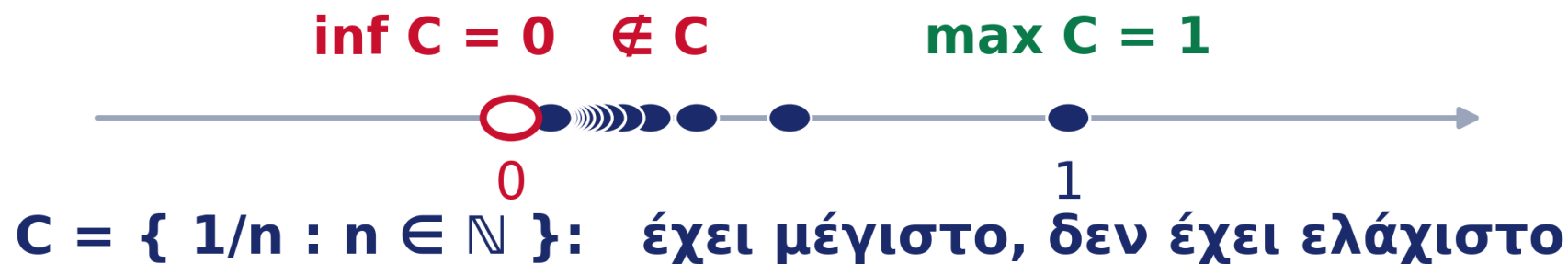
Το A έχει μέγιστο $\Leftrightarrow \sup A \in A$ και τότε $\max A = \sup A$

Ο χαρακτηρισμός που θα χρησιμοποιούμε στα όρια

**$s = \sup A \Leftrightarrow$ το s είναι άνω φράγμα, και για κάθε $\varepsilon > 0$
υπάρχει $x \in A$ με $s - \varepsilon < x \leq s$**

Η συνθήκη αυτή συνδέει τα φράγματα με την έννοια της προσέγγισης.

Δύο παραδείγματα που ξεχωρίζουν max από sup



Το supremum ανήκει πάντα στο $\mathbb{R}$ — δεν χρειάζεται να ανήκει στο A

Το αξίωμα πληρότητας

**Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}$
έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$**

Γίνεται δεκτό ως αξίωμα

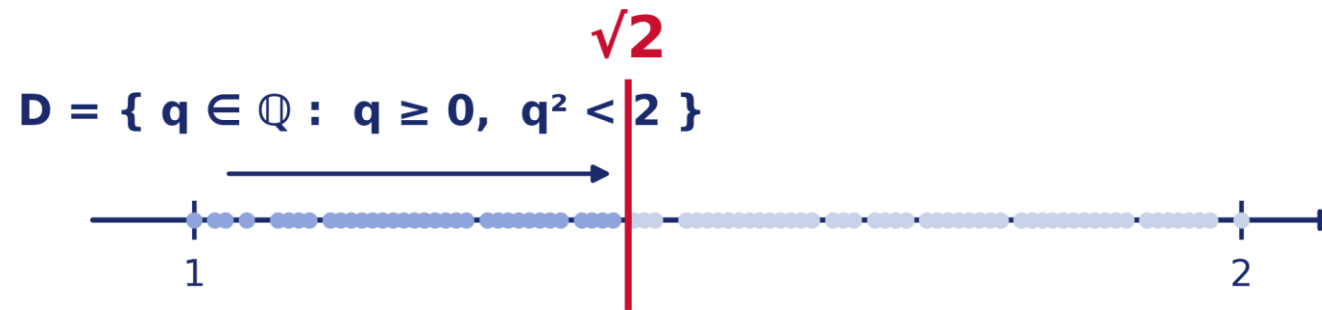
Δεν αποδεικνύεται από τα αξιώματα πράξεων και διάταξης. Από αυτό προκύπτουν η Αρχιμήδεια ιδιότητα και η αρχή των εγκιβωτισμένων διαστημάτων.

Ή αποδεικνύεται ως ιδιότητα

Αν κατασκευάσουμε τους πραγματικούς μέσω τομών Dedekind, η πληρότητα προκύπτει ως ιδιότητα της κατασκευής.

Για το κάτω μέρος: $\inf A = -\sup(-A)$.

Γιατί η πληρότητα έχει σημασία



Το D είναι φραγμένο άνω,
αλλά ΔΕΝ έχει ελάχιστο άνω φράγμα μέσα στο $\mathbb{Q}$

Μέσα στο $\mathbb{R}$

Το D έχει supremum τη $\sqrt{2}$.
Το αξίωμα πληρότητας εγγυάται την
ύπαρξή του.

Μέσα στο $\mathbb{Q}$

Η $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.
Η πυκνότητα των ρητών ΔΕΝ
εξασφαλίζει πληρότητα.

Η Αρχιμήδεια ιδιότητα

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > x$
το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

Απόδειξη από την πληρότητα

- 1 Αν το $\mathbb{N}$ ήταν άνω φραγμένο, θα είχε supremum s .
- 2 Ο $s - 1$ δεν είναι άνω φράγμα, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > s - 1$.
- 3 Τότε $n + 1 > s$, και ο $n + 1$ είναι φυσικός — αντίφαση.

Συνέπεια: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $1/n < \varepsilon$ (αρκεί $n > 1/\varepsilon$)

Αν θέλουμε $1/n < 0,001$ χρειαζόμαστε $n > 1000$ — η μικρότερη επιτρεπτή τιμή είναι 1001, όχι 1000.

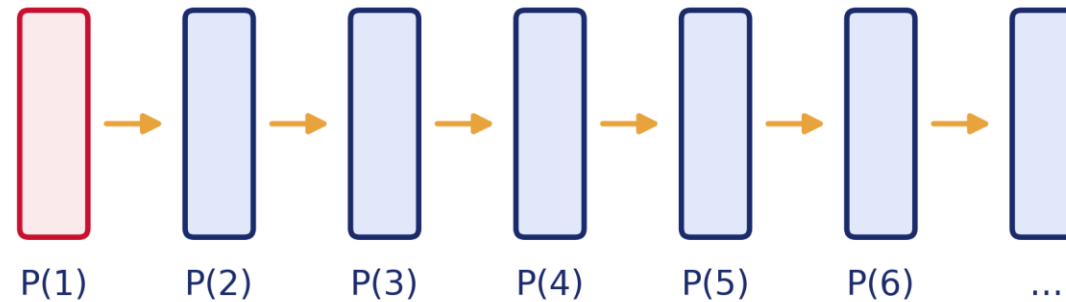
7

Μαθηματική επαγωγή

Η μέθοδος απόδειξης για προτάσεις που εξαρτώνται από φυσικό αριθμό

Βάση και επαγωγικό βήμα

βάση **επαγωγικό βήμα:** $P(k) \Rightarrow P(k+1)$



Χωρίς βάση δεν πέφτει κανένα. Χωρίς βήμα δεν προχωρά η πτώση.

1 · Βάση επαγωγής

Αποδεικνύουμε ότι ισχύει η $P(n_0)$.

2 · Επαγωγικό βήμα

Για αυθαίρετο $k \geq n_0$, υποθέτουμε $P(k)$ και αποδεικνύουμε $P(k+1)$.

Παράδειγμα 11 — το άθροισμα $1 + 2 + \dots + n$

$$1 + 2 + \dots + n = n(n + 1) / 2$$

Βάση: $n = 1$ Και οι δύο πλευρές είναι ίσες με 1.

Επαγωγικό βήμα: υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο αυθαίρετο $k \geq 1$

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = k(k + 1)/2 + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$$

Αυτός είναι ακριβώς ο ζητούμενος τύπος για $n = k + 1$.

Προσοχή στη λογική της μεθόδου

Η επαλήθευση πολλών αρχικών περιπτώσεων δεν αντικαθιστά το επαγωγικό βήμα. Και ένα σωστό επαγωγικό βήμα χωρίς βάση δεν αρκεί.

8

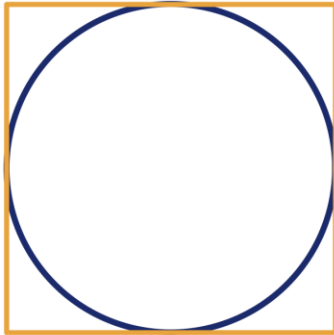
Η μαθηματική αυστηρότητα στην πράξη

Τρία παραδείγματα όπου η διαίσθηση δίνει λάθος απάντηση

Παράδειγμα 1 — η σκάλα και ο κύκλος

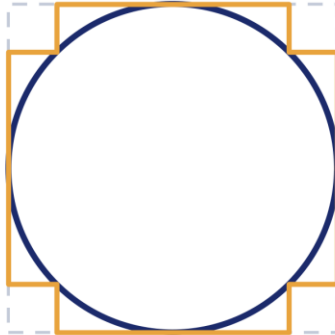
Μπλε: ο κύκλος (περίμετρος π). Πορτοκαλί: η τεθλασμένη (μήκος 4).

$n = 1$



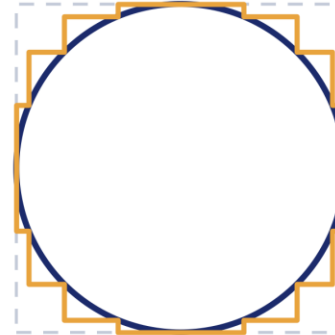
μήκος = 4

$n = 2$



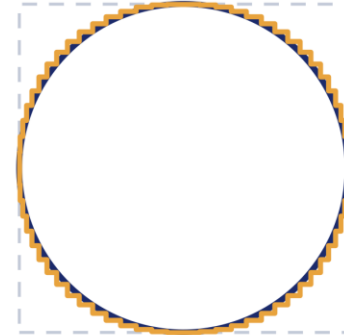
μήκος = 4

$n = 4$



μήκος = 4

$n = 16$



μήκος = 4

**Αν η σκάλα πλησιάζει τον κύκλο,
πλησιάζει και το μήκος της την περίμετρό του;**

Ο ακριβής υπολογισμός

Το μήκος της τεθλασμένης

Σε κάθε τεταρτημόριο τα οριζόντια τμήματα έχουν συνολικό μήκος $\frac{1}{2}$ και τα κατακόρυφα $\frac{1}{2}$. Άθροισμα 1, ανεξάρτητα από τα σκαλοπάτια.

Η προσέγγιση είναι πραγματική

Κάθε σκαλοπάτι και το αντίστοιχο τόξο βρίσκονται στο ίδιο μικρό ορθογώνιο.
 $\delta_n = \sin(\pi/4n) \rightarrow 0$

$$L_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 4$$

$$C = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

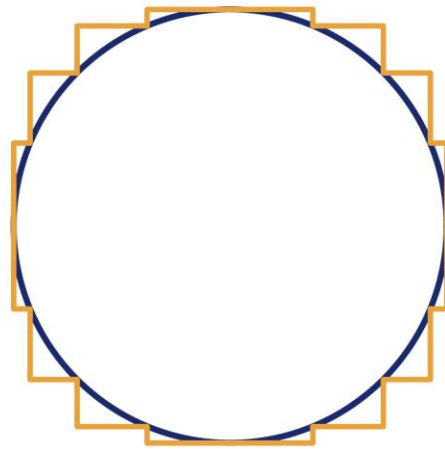
Το μη δικαιολογημένο βήμα: μήκος του ορίου = όριο των μηκών

Δεν προκύπτει ότι $\pi = 4$. Προκύπτει ότι αυτή η μετάβαση στο όριο είναι λανθασμένη.

Σύγκριση με την προσέγγιση μέσω χορδών

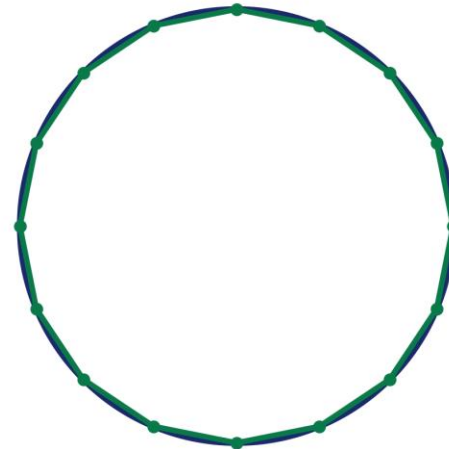
Ίδια σημεία του κύκλου — δύο διαφορετικά όρια μηκών

σκαλοπάτια



$L_n = 4$ για κάθε n
δεν συγκλίνει στο π

χορδές



$P_n = 4n \cdot \sin(\pi/4n)$
συγκλίνει στο π

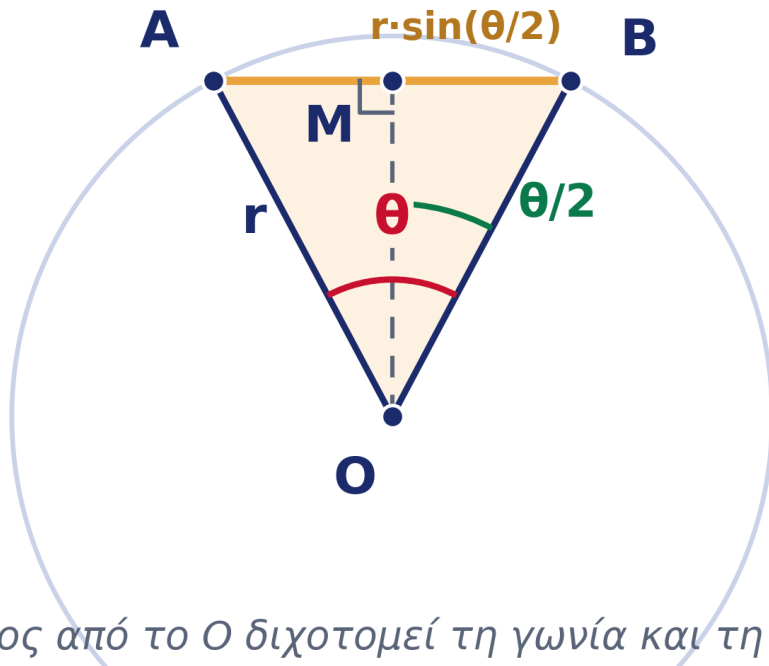
$$P_n = 4n \cdot \sin(\pi/4n) = \pi \cdot \left[\sin(\pi/4n) / (\pi/4n) \right] \rightarrow \pi$$

Δύο οικογένειες καμπυλών πλησιάζουν τον ίδιο κύκλο και έχουν διαφορετικά όρια μηκών. Η σύγκλιση των θέσεων δεν αρκεί.

Από πού προκύπτει ο τύπος P_n

Κανονικό πολύγωνο $4n$ πλευρών, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $r = \frac{1}{2}$

$$\text{χορδή } AB = 2r \cdot \sin(\theta/2)$$



1

Η επίκεντρη γωνία

$$\theta = 2\pi / 4n = \pi / 2n$$

2

Η χορδή

$$2r \cdot \sin(\theta/2) = 2r \cdot \sin(\pi/4n)$$

3

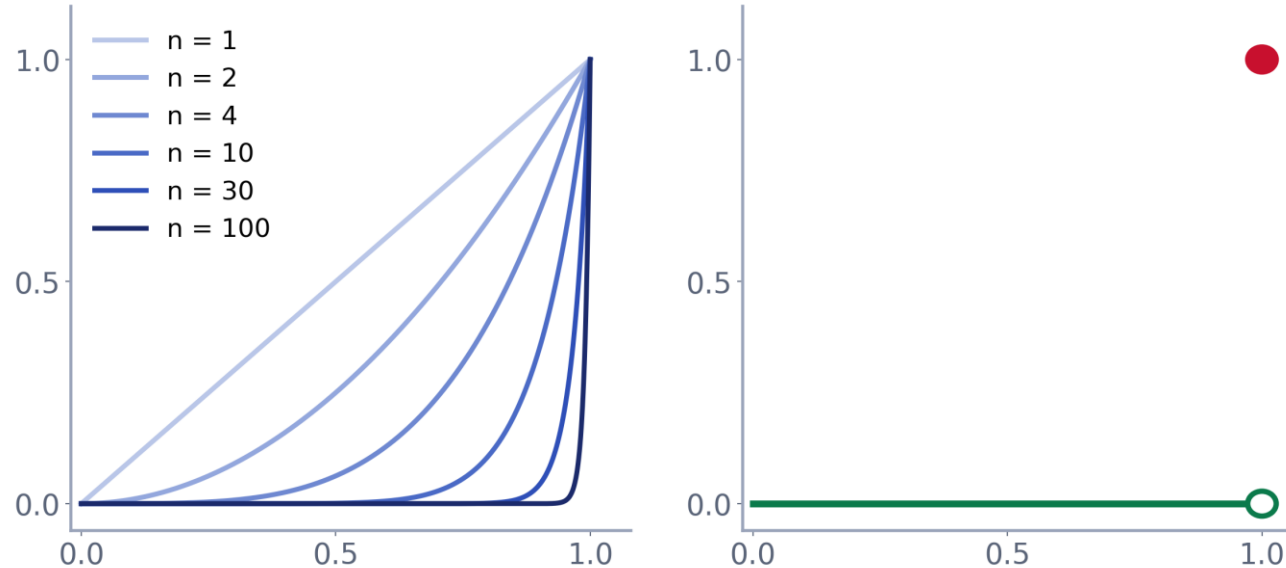
Με $r = \frac{1}{2}$

$$\text{χορδή} = \sin(\pi/4n)$$

$$P_n = 4n \cdot \sin(\pi / 4n)$$

Παράδειγμα 2 — ασυνεχές όριο συνεχών

$f_n(x) = x^n$ — κάθε μία συνεχής το όριο — ασυνεχές στο 1



$$x^n \rightarrow 0 \text{ για } 0 \leq x < 1$$

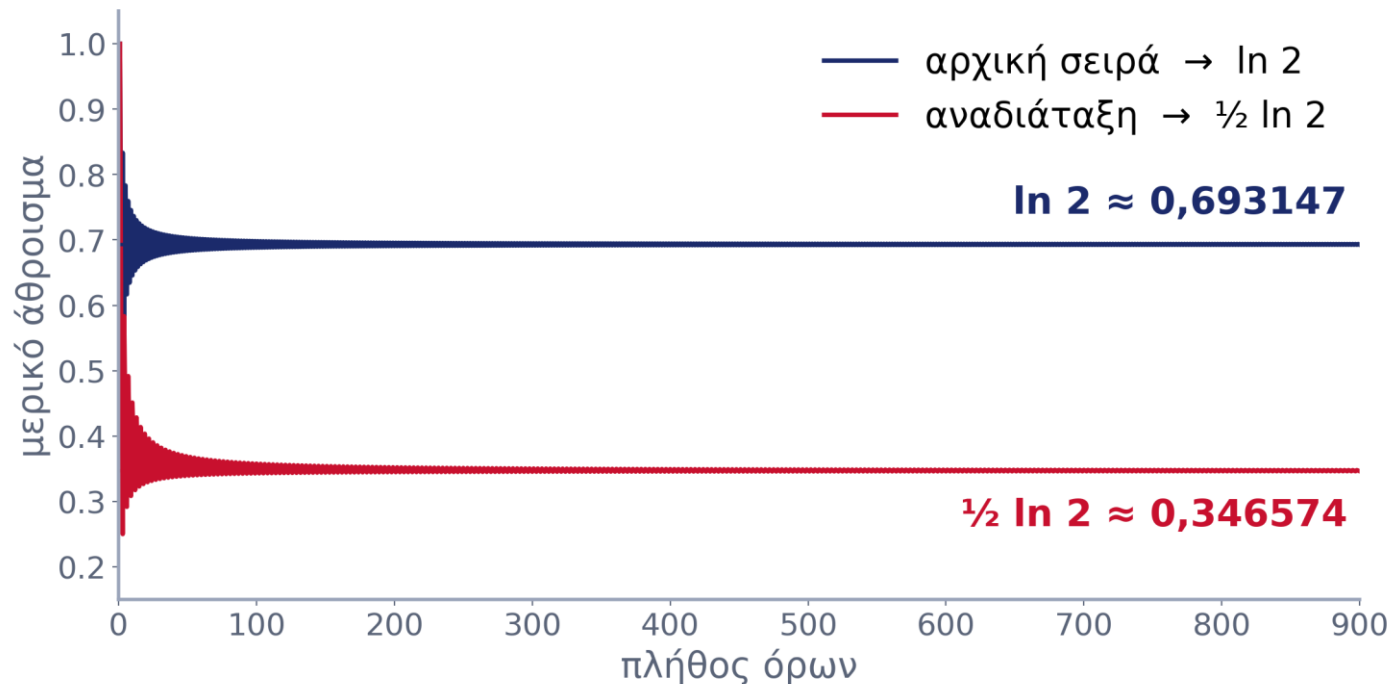
$$1^n = 1 \text{ για κάθε } n$$

Η κινούμενη απόκλιση

Για $x_n = 2^{(-1/n)} \rightarrow 1$ ισχύει $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, ενώ $f(x_n) = 0$.

Παράδειγμα 3 — αναδιάταξη άπειρης σειράς

Ίδιοι όροι, άλλη σειρά, άλλο άθροισμα



$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Κάθε όρος εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Δεν προσθέσαμε ούτε αφαιρέσαμε κανέναν.

Ποιο βήμα θα ήταν λανθασμένο

✗ Λάθος διατύπωση

«Η αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης δεν επιβιώνει στο άπειρο.»

✓ Σωστή διατύπωση

Η αντιμεταθετικότητα εξακολουθεί να ισχύει για κάθε πεπερασμένο άθροισμα. Μια άπειρη σειρά όμως ΟΡΙΖΕΤΑΙ ως όριο μερικών αθροισμάτων — και η αναδιάταξη αλλάζει αυτά τα μερικά αθροίσματα.

Θεώρημα Riemann: αν η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη,
για κάθε $A \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη που συγκλίνει στο A

Μια σειρά λέμε ότι συγκλίνει υπό συνθήκη όταν η ίδια συγκλίνει, αλλά η σειρά των απόλυτων τιμών των όρων της αποκλίνει.

Η απόλυτη σύγκλιση είναι η υπόθεση που επιτρέπει την ελεύθερη αλλαγή της σειράς των όρων.

Τι μας διδάσκουν τα παραδείγματα

Οι εικόνες και τα παραδείγματα καθοδηγούν τη σκέψη μας. Για να περάσουμε από μια εικόνα σε ένα συμπέρασμα, προσδιορίζουμε:

1

το αντικείμενο που
συγκλίνει

2

το είδος της σύγκλισης

3

τις υποθέσεις που
διατηρούν την ιδιότητα

Το άπειρο δεν είναι ένα τελευταίο πεπερασμένο στάδιο.

Ασκήσεις για εμπέδωση

1 – 2

Πράξεις συνόλων, De Morgan, καρτεσιανό γινόμενο, $|\emptyset|$ και $|\{\emptyset\}|$

3

0,272727... και 2,16666... ως ανάγωγα κλάσματα

4 – 5

Αντιστοιχία $\mathbb{N} \rightarrow$ περιττοί· θέση του -4 στην απαρίθμηση του $\mathbb{Z}$

6 – 7

$\sup$, $\inf$, $\max$, $\min$ για $(-2,3]$, $\{1 - 1/n\}$ και $\mathbb{N}$ · η μικρότερη τιμή n με $1/n < 0,0001$

8

Επαγωγή: το άθροισμα των πρώτων n περιττών είναι n^2

9 – 10

Σωστό ή λάθος· αυστηρή απόδειξη ότι $\sup(0,1) = 1$

Δοκιμάστε πρώτα να γράψετε δική σας λύση και έπειτα ελέγξτε την με τις ενδεικτικές λύσεις.