Ασκήσεις: Τυχαία Διανύσματα και Από Κοινού Κατανομές

Στατιστική ΙΙ — Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, ΟΠΑ
Διάλεξη 5

1 Από Κοινού Συνάρτηση Πιθανότητας και Περιθώριες Κατανομές (Διακριτή Περίπτωση)

Παράδειγμα 1: Πίνακας πιθανοτήτων — Περιθώριες

Σε μια τράπεζα, ένας πελάτης μπορεί να αιτηθεί X στεγαστικά δάνεια και Y καταναλωτικά δάνεια μέσα σε ένα έτος. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον πίνακα:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,15	0,10	0,05
1	0,10	0,25	0,10
2	0,05	0,10	0,10

(α΄) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

(β΄) Υπολογίστε $P(X \geq 1, Y \geq 1)$.

(γ΄) Υπολογίστε $P(X + Y \leq 2)$.

Λύση

(α) Αθροίζοντας κατά γραμμές (ως προς x):

$$f_X(0) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}30,$$
$$f_X(1) = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}10 = 0{,}45,$$
$$f_X(2) = 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}25.$$

Αθροίζοντας κατά στήλες (ως προς y):

$$f_Y(0) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}30,$$
$$f_Y(1) = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}10 = 0{,}45,$$
$$f_Y(2) = 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}25.$$

Πλήρης πίνακας:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0,15	0,10	0,05	**0,30**
1	0,10	0,25	0,10	**0,45**
2	0,05	0,10	0,10	**0,25**
$f_Y(y)$	**0,30**	**0,45**	**0,25**	1,00

(β) $P(X \geq 1, Y \geq 1) = f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2) = 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}55$.
(γ) Ζεύγη με $x + y \leq 2$: $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)$.

$$P(X + Y \leq 2) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}70.$$

Παρατήρηση

Σε κάθε πίνακα πιθανοτήτων ελέγχουμε πάντα: (ι) $f(x, y) \geq 0$ και (ιι) $\sum\sum f(x, y) = 1$. Οι περιθώριες αθροίζουν επίσης στη μονάδα.

Παράδειγμα 2: Εύρεση σταθεράς — Διακριτή περίπτωση

Η κοινή συνάρτηση πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται:

$$f(x, y) = c(x + 2y), \quad x = 1, 2, \quad y = 1, 2, 3.$$

(α΄) Βρείτε τη σταθερά c.

(β΄) Βρείτε τις περιθώριες.

(γ΄) Υπολογίστε $P(X = 1, Y \leq 2)$.

Λύση

(α) $\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} c(x + 2y) = 1$.

$$\begin{aligned}\sum &= c\big[(1+2) + (1+4) + (1+6) + (2+2) + (2+4) + (2+6)\big] \\ &= c[3+5+7+4+6+8] = 33c.\end{aligned}$$

Άρα $c = \dfrac{1}{33}$.

(β) Για $x = 1$: $f_X(1) = \frac{1}{33}(3+5+7) = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$.
Για $x = 2$: $f_X(2) = \frac{1}{33}(4+6+8) = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$.
Για $y = 1$: $f_Y(1) = \frac{1}{33}(3+4) = \frac{7}{33}$. $f_Y(2) = \frac{1}{33}(5+6) = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$. $f_Y(3) = \frac{1}{33}(7+8) = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$.
(γ) $P(X = 1, Y \leq 2) = f(1,1) + f(1,2) = \frac{3}{33} + \frac{5}{33} = \frac{8}{33}$.

Παράδειγμα 3: Από κοινού σ.κ. διακριτής τ.μ.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Παραδείγματος 1, βρείτε την από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{XY}(x, y)$ και υπολογίστε $F_{XY}(1, 1)$ και $F_{XY}(0{,}5,\ 1{,}5)$.

Λύση

$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum\limits_{s \leq x}\sum\limits_{t \leq y} f(s, t)$.

$$F_{XY}(1, 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}25 = 0{,}60.$$

Για $F_{XY}(0{,}5,\ 1{,}5)$: οι τιμές που ικανοποιούν $X \leq 0{,}5$ και $Y \leq 1{,}5$ είναι $X = 0$ και $Y \in \{0, 1\}$.

$$F_{XY}(0{,}5,\ 1{,}5) = f(0,0) + f(0,1) = 0{,}15 + 0{,}10 = 0{,}25.$$

Έλεγχος

$F_{XY}(\infty, \infty) = \sum\sum f(x, y) = 1$ ✓. $F_{XY}(-\infty, y) = 0$ ✓. Περιθώρια: $F_X(1) = F_{XY}(1, \infty) = 0{,}30 + 0{,}45 = 0{,}75$ ✓.

2 Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα 4: Έλεγχος ανεξαρτησίας — Διακριτή περίπτωση

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα του Παραδείγματος 1, εξετάστε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση

Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ για **κάθε** (x,y).
Ελέγχουμε $(1,1)$: $f(1,1) = 0{,}25$, αλλά $f_X(1) \cdot f_Y(1) = 0{,}45 \cdot 0{,}45 = 0{,}2025$.
Αφού $0{,}25 \neq 0{,}2025$, οι X, Y **δεν είναι ανεξάρτητες**.

Παρατήρηση

Αρκεί **ένα** ζεύγος στο οποίο η σχέση δεν ισχύει. Αν θέλουμε να *δείξουμε* ανεξαρτησία, πρέπει να ελέγξουμε **όλα** τα ζεύγη.

Παράδειγμα 5: Ανεξάρτητες Bernoulli — Κατασκευή πίνακα

Έστω $X \sim Bernoulli(0{,}3)$ (ένδειξη ύφεσης) και $Y \sim Bernoulli(0{,}4)$ (ένδειξη ανόδου επιτοκίων) ανεξάρτητες.

(α′) Κατασκευάστε τον πίνακα της από κοινού σ.π.

(β′) Βρείτε $P(X = 0, Y = 0)$.

(γ′) Βρείτε την $F_{XY}(x,y)$.

Λύση

(α) Ανεξαρτησία $\Rightarrow f_{XY}(i,j) = f_X(i) \cdot f_Y(j)$.

$X \backslash Y$	0	1	f_X
0	$0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$	$0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$	0,70
1	$0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$	$0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$	0,30
f_Y	0,60	0,40	1

(β) $P(X = 0, Y = 0) = 0{,}42$.
(γ) Αφού $X, Y \in \{0,1\}$:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ή } y < 0, \\ 0{,}42, & 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1, \\ 0{,}70, & 0 \le x < 1,\ y \ge 1, \\ 0{,}60, & x \ge 1,\ 0 \le y < 1, \\ 1, & x \ge 1,\ y \ge 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 6: Ανεξαρτησία — Ανάλυση τυχερού παιχνιδιού

Ένας παίκτης ρίχνει ένα ισορροπημένο ζάρι δύο φορές. Ορίζουμε $X =$ αποτέλεσμα πρώτης ρίψης, $Y =$ αποτέλεσμα δεύτερης ρίψης.

(α′) Γράψτε την από κοινού σ.π. $f(x,y)$ και δείξτε ανεξαρτησία.

(β′) Ορίστε $S = X + Y$. Υπολογίστε $P(S = 7)$.

Λύση

(α) Κάθε ζεύγος $(x, y) \in \{1, \ldots, 6\}^2$ εμφανίζεται με πιθανότητα $\frac{1}{36}$.
$f_X(x) = \frac{1}{6}$, $f_Y(y) = \frac{1}{6} \Rightarrow f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{36} = f(x, y)$ για κάθε (x, y). Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες ✓.
(β) Ζεύγη με $x + y = 7$: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ — 6 ζεύγη.

$$P(S = 7) = 6 \cdot \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{6}.$$

3 Από Κοινού Σ.Π.Π. και Περιθώριες (Συνεχής Περίπτωση)

Παράδειγμα 7: Εύρεση σταθεράς, περιθώριες, πιθανότητα

Η χρονική διάρκεια (σε χρόνια) δύο επενδυτικών προϊόντων μοντελοποιείται με:

$$f(x, y) = \begin{cases} c\,x\,y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α′) Βρείτε τη σταθερά c.

(β′) Υπολογίστε $P\Big(X < \frac{1}{2},\ Y < 1\Big)$.

(γ′) Βρείτε τις περιθώριες $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

Λύση

(α)

$$\int_0^2 \int_0^1 cxy\, dx\, dy = c \int_0^2 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = c \int_0^2 \frac{y}{2}\, dy = c \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = c.$$

Άρα $c = 1$.
(β) $P\Big(X < \frac{1}{2}, Y < 1\Big) = \int_0^1 \int_0^{1/2} xy\, dx\, dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{8}\, dy = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
(γ) $f_X(x) = \int_0^2 xy\, dy = x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2x, \quad 0 < x < 1.$
$f_Y(y) = \int_0^1 xy\, dx = y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{y}{2}, \quad 0 < y < 2.$

Έλεγχος

$\int_0^1 2x\, dx = 1$ ✓ $\quad \int_0^2 \frac{y}{2}\, dy = 1$ ✓.
$f(x, y) = xy = (2x) \cdot \frac{y}{2} = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow$ **ανεξάρτητες** (στήριξη ορθογώνια + παραγοντοποίηση).

Παράδειγμα 8: Μη ορθογώνια στήριξη: $0 < x < y < 1$

Η αξία (σε χιλ. ευρώ) δύο μετοχών μοντελοποιείται με:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1 - y), & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Επαληθεύστε ότι η f είναι σ.π.π.

(β΄) Βρείτε $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(γ΄) Υπολογίστε $P(Y > 2X)$.

Λύση

(α) $f(x,y) \geq 0$ στη στήριξη (αφού $1-y \geq 0$) και

$$\int_0^1 \int_0^y 6(1-y)\,dx\,dy = \int_0^1 6(1-y)y\,dy = 6\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 1. \checkmark$$

(β) Για δεδομένο x, $y \in (x, 1)$:

$$f_X(x) = \int_x^1 6(1-y)\,dy = 6\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_x^1 = 3(1-x)^2, \quad 0 < x < 1.$$

Για δεδομένο y, $x \in (0, y)$:

$$f_Y(y) = \int_0^y 6(1-y)\,dx = 6y(1-y), \quad 0 < y < 1.$$

(γ) Στήριξη: $0 < x < y < 1$ *και* $y > 2x \Rightarrow x < y/2$, $0 < x < y < 1$.

$$P(Y > 2X) = \int_0^1 \int_0^{y/2} 6(1-y)\,dx\,dy = \int_0^1 6(1-y)\cdot\frac{y}{2}\,dy = 3\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση

Όταν η στήριξη δεν είναι ορθογώνια, **σχεδιάζουμε πάντα** τη χωρική περιοχή στο $\mathbb{R}^2$ για να καθορίσουμε σωστά τα όρια ολοκλήρωσης. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ανεξαρτησία δεν μπορεί να ισχύει — η στήριξη πρέπει να γράφεται ως $A_X \times A_Y$.

Παράδειγμα 9: Στήριξη $x + y < 1$ — Ανεξαρτησία

Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x + y < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Βρείτε τις περιθώριες.

(β΄) Εξετάστε αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση

(α) Για δεδομένο $x \in (0,1)$, $y \in (0, 1-x)$:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = 12x(1-x)^2, \quad 0 < x < 1.$$

Κατά συμμετρία: $f_Y(y) = 12y(1-y)^2$, $0 < y < 1$.
(β) $f_X(x) \cdot f_Y(y) = 144xy(1-x)^2(1-y)^2 \neq 24xy = f(x,y)$.
Οι X, Y **δεν είναι ανεξάρτητες**.

Παρατήρηση

Παρόλο που $f(x,y) = 24xy$ «μοιάζει» να παραγοντοποιείται σε $g(x) \cdot h(y)$, η μη ορθογώνια στήριξη $x + y < 1$ αποκλείει ανεξαρτησία. Απαιτούνται **και** παραγοντοποίηση **και** ορθογώνια στήριξη.

Παράδειγμα 10: Εκθετική σ.π.π. σε $(0,\infty)^2$

Δύο μηχανές έχουν χρόνο βλάβης X και Y (σε ώρες) με

$$f(x,y) = e^{-x-y}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

(α′) Βρείτε τις περιθώριες και εξετάστε ανεξαρτησία.

(β′) Υπολογίστε $P(X < Y)$.

(γ′) Βρείτε $\mathbb{E}[\min(X,Y)]$.

Λύση

(α) $f_X(x) = \int_0^\infty e^{-x-y}\,dy = e^{-x}$, $x > 0 \Rightarrow X \sim Exp(1)$.
Ομοίως $f_Y(y) = e^{-y}$. $f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x-y} = f(x,y)$ ✓. **Ανεξάρτητες.**
(β)

$$P(X < Y) = \int_0^\infty \int_0^y e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-y}(1 - e^{-y})\,dy = 1 - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(Αναμενόμενο από συμμετρία: $X \overset{d}{=} Y$ και ανεξάρτητες.)
(γ) $M = \min(X,Y)$: $P(M > t) = P(X > t)P(Y > t) = e^{-2t} \Rightarrow M \sim Exp(2) \Rightarrow \mathbb{E}[M] = \frac{1}{2}$ ώρα.

Παρατήρηση

Γενικά, αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες $Exp(\lambda_i)$, τότε $\min_i X_i \sim Exp(\sum \lambda_i)$. Εφαρμόζεται εκτεταμένα στη θεωρία αξιοπιστίας.

4 Μέση Τιμή Συνάρτησης Δύο Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα 11: $\mathbb{E}[g(X,Y)]$ — Διακριτή περίπτωση

Σε μια αγορά, η εβδομαδιαία ζήτηση για δύο προϊόντα X (βασικό) και Y (πολυτελείας) ακολουθεί τον πίνακα:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,15	0,10	0,05
1	0,10	0,25	0,10
2	0,05	0,10	0,10

Υπολογίστε:

(α′) $\mathbb{E}[X + Y]$

(β′) $\mathbb{E}[XY]$

(γ′) $\mathbb{E}[\max(X,Y)]$

Λύση

Περιθώριες (Παράδ. 1): $f_X(0) = 0{,}30$, $f_X(1) = 0{,}45$, $f_X(2) = 0{,}25$ (ομοίως για Y).
(α) $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0{,}30 + 1 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}95$. Από συμμετρία $\mathbb{E}[Y] = 0{,}95$.
$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1{,}90$.
(β)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \textstyle\sum_x \sum_y xy\, f(x,y) \\ &= 1{\cdot}1{\cdot}0{,}25 + 1{\cdot}2{\cdot}0{,}10 + 2{\cdot}1{\cdot}0{,}10 + 2{\cdot}2{\cdot}0{,}10 = 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}20 + 0{,}40 = 1{,}05.\end{aligned}$$

(γ) $\mathbb{E}[\max(X,Y)] = \sum_x \sum_y \max(x,y) \cdot f(x,y)$.

(x,y)	max	$\max \cdot f$
$(0,0)$	0	0
$(0,1)$	1	0,10
$(0,2)$	2	0,10
$(1,0)$	1	0,10
$(1,1)$	1	0,25
$(1,2)$	2	0,20
$(2,0)$	2	0,10
$(2,1)$	2	0,20
$(2,2)$	2	0,20

$\mathbb{E}[\max(X,Y)] = 0 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}20 = 1{,}25$.

Παράδειγμα 12: $\mathbb{E}[g(X,Y)]$ — Συνεχής περίπτωση

Δύο επενδυτικά προϊόντα έχουν χρονικές διάρκειες X και Y (σε χρόνια) με από κοινού σ.π.π.

$$f(x,y) = xy, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2.$$

Υπολογίστε:

(α′) $\mathbb{E}[X]$ και $\mathbb{E}[Y]$.

(β′) $\mathbb{E}[XY]$.

(γ′) $\mathbb{E}[X^2 + Y^2]$.

Λύση

Περιθώριες (Παράδ. 7): $f_X(x) = 2x$, $f_Y(y) = y/2$.
(α) $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 2x\, dx = \frac{2}{3}$. $\mathbb{E}[Y] = \int_0^2 y \cdot \frac{y}{2}\, dy = \frac{4}{3}$.
(β) Ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$.
Απευθείας: $\mathbb{E}[XY] = \int_0^2 \int_0^1 x^2 y^2\, dx\, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{9}$ ✓.
(γ) $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}$. $\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^2 y^2 \cdot \frac{y}{2}\, dy = 2$.
$\mathbb{E}[X^2 + Y^2] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

Παράδειγμα 13: Μέση τιμή συνάρτησης — Μη ορθογώνια στήριξη

Έστω $f(x,y) = 6(1-y)$ για $0 < x < y < 1$. Υπολογίστε $\mathbb{E}[X^2 Y]$.

Λύση

$$\mathbb{E}[X^2Y] = \int_0^1 \int_0^y x^2 y \cdot 6(1-y)\,dx\,dy = 6\int_0^1 y(1-y)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y dy$$
$$= 2\int_0^1 y^4(1-y)\,dy = 2\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] = 2 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{15}.$$

5 Δεσμευμένες Κατανομές — Διακριτή Περίπτωση

Παράδειγμα 14: Δεσμευμένη σ.π. — Μέση τιμή και διακύμανση

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα πιθανοτήτων του Παραδείγματος 1, υπολογίστε:

(α΄) Τη δεσμευμένη σ.π. $f_{Y|X}(y \mid X = 1)$.

(β΄) Τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[Y \mid X = 1]$.

(γ΄) Τη δεσμευμένη διακύμανση $\mathrm{Var}(Y \mid X = 1)$.

Λύση

(α) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$. Για $x = 1$, $f_X(1) = 0{,}45$:

$$f_{Y|X}(0|1) = \frac{0{,}10}{0{,}45} = \frac{2}{9}, \quad f_{Y|X}(1|1) = \frac{0{,}25}{0{,}45} = \frac{5}{9}, \quad f_{Y|X}(2|1) = \frac{0{,}10}{0{,}45} = \frac{2}{9}.$$

Έλεγχος: $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1$ ✓.
(β) $\mathbb{E}[Y|X = 1] = 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$.
(ς) $\mathbb{E}[Y^2|X = 1] = 0 + \frac{5}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{9}$.
$\mathrm{Var}(Y|X = 1) = \frac{13}{9} - 1^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$.

Παράδειγμα 15: Δεσμευμένη σ.π. για κάθε τιμή της X

Βρείτε τη δεσμευμένη σ.π. $f_{Y|X}(y \mid X = x)$ για **κάθε** $x \in \{0, 1, 2\}$ στο Παράδειγμα 1 και γράψτε τον πίνακα δεσμευμένων πιθανοτήτων.

Λύση

	$f_{Y\|X}(0\|x)$	$f_{Y\|X}(1\|x)$	$f_{Y\|X}(2\|x)$
$X = 0$	$\frac{0{,}15}{0{,}30} = \frac{1}{2}$	$\frac{0{,}10}{0{,}30} = \frac{1}{3}$	$\frac{0{,}05}{0{,}30} = \frac{1}{6}$
$X = 1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$
$X = 2$	$\frac{0{,}05}{0{,}25} = \frac{1}{5}$	$\frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$	$\frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$

Κάθε γραμμή αθροίζει σε 1 ✓. Παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή αλλάζει ανάλογα με την τιμή x — εδώ, όσο μεγαλώνει η X, η κατανομή της Y μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές.

Παράδειγμα 16: Νόμος ολικής μέσης τιμής

Επαληθεύστε ότι $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}(Y)$ χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Παραδείγματος 1.

Λύση

Υπολογίζουμε $\mathbb{E}[Y|X=x]$ για κάθε x:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X=0] &= 0\cdot\tfrac{1}{2} + 1\cdot\tfrac{1}{3} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3},\\ \mathbb{E}[Y|X=1] &= 1 \quad (\text{Παράδ. } 14),\\ \mathbb{E}[Y|X=2] &= 0\cdot\tfrac{1}{5} + 1\cdot\tfrac{2}{5} + 2\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{5}.\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \frac{2}{3}\cdot 0{,}30 + 1\cdot 0{,}45 + \frac{6}{5}\cdot 0{,}25 = 0{,}20 + 0{,}45 + 0{,}30 = 0{,}95 = \mathbb{E}[Y]$. ✓

Παρατήρηση

Ο **νόμος ολικής μέσης τιμής** $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}(Y)$ μας λέει ότι η αδέσμευτη μέση τιμή προκύπτει ως σταθμικός μέσος των δεσμευμένων μέσων τιμών, με βάρη τις περιθώριες πιθανότητες.

6 Δεσμευμένες Κατανομές — Συνεχής Περίπτωση

Παράδειγμα 17: Δεσμευμένη σ.π.π. — Αναγνώριση κατανομής

Έστω $f(x,y) = 6(1-y)$ για $0 < x < y < 1$ (Παράδ. 8). Υπολογίστε:

(α′) Τη δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X|Y}(x|y)$.

(β′) Τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[X|Y=y]$.

(γ′) Τη $P(X < 0{,}3 \mid Y = 0{,}5)$.

Λύση

$f_Y(y) = 6y(1-y)$ (Παράδ. 8).
(α) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{6(1-y)}{6y(1-y)} = \frac{1}{y}$, $0 < x < y$.
Δηλαδή $X|Y = y \sim Uniform(0,y)$.
(β) $\mathbb{E}[X|Y=y] = \frac{y}{2}$.
(γ) $P(X < 0{,}3 \mid Y = 0{,}5) = \int_0^{0{,}3} \frac{1}{0{,}5}\,dx = 2\cdot 0{,}3 = 0{,}6$.

Παράδειγμα 18: Αντίστροφη δέσμευση — $f_{Y|X}(y|x)$

Στο ίδιο μοντέλο ($f(x,y) = 6(1-y)$, $0 < x < y < 1$), βρείτε:

(α′) Τη δεσμευμένη σ.π.π. $f_{Y|X}(y|x)$.

(β′) Τη $\mathbb{E}[Y|X=x]$ και $\mathrm{Var}(Y|X=x)$.

Λύση

$f_X(x) = 3(1-x)^2$ (Παράδ. 8). Για δεδομένο x, $y \in (x,1)$:

(α)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{6(1-y)}{3(1-x)^2} = \frac{2(1-y)}{(1-x)^2}, \quad x < y < 1.$$

(β) Υπολογίζουμε $\mathbb{E}[Y|X=x]$:

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \frac{2}{(1-x)^2}\int_x^1 y(1-y)\,dy.$$

$$\int_x^1 y(1-y)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_x^1 = \frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{1-3x^2+2x^3}{6} = \frac{(1-x)^2(1+2x)}{6}.$$

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^2(1+2x)}{6} = \frac{1+2x}{3}.$$

Τώρα υπολογίζουμε $\mathbb{E}[Y^2|X=x]$:

$$\int_x^1 y^2(1-y)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_x^1 = \frac{1}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = \frac{1-4x^3+3x^4}{12}.$$

Παραγοντοποίηση: $1-4x^3+3x^4 = (1-x)^2(3x^2+2x+1)$, άρα

$$\mathbb{E}[Y^2|X=x] = \frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^2(3x^2+2x+1)}{12} = \frac{3x^2+2x+1}{6}.$$

Δεσμευμένη διακύμανση:

$$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \frac{3x^2+2x+1}{6} - \left(\frac{1+2x}{3}\right)^2 = \frac{3(3x^2+2x+1)-2(1+2x)^2}{18}.$$

Αριθμητής: $9x^2+6x+3-2-8x-8x^2 = x^2-2x+1 = (1-x)^2$. Άρα:

$$\boxed{\mathrm{Var}(Y|X=x) = \frac{(1-x)^2}{18}}.$$

Έλεγχος

Για $x=0$: $\mathrm{Var}(Y|X=0) = \frac{1}{18} \approx 0{,}056$. Ελέγχουμε: $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ ✓.
Για $x=\frac{1}{2}$: $\mathrm{Var}(Y|X=\frac{1}{2}) = \frac{1}{72} \approx 0{,}014$. Ελέγχουμε: $\frac{11}{24} - \frac{4}{9} = \frac{33-32}{72} = \frac{1}{72}$ ✓.
Παρατηρήστε ότι $\mathrm{Var}(Y|X=x) \to 0$ καθώς $x \to 1$: όταν η X παίρνει τιμή κοντά στο 1, η Y (που πρέπει $Y > X$) «στριμώχνεται» κοντά στο 1 με πολύ μικρή μεταβλητότητα.

Παράδειγμα 19: Νόμος ολικής διακύμανσης

Έστω $f(x,y) = 6(1-y)$, $0 < x < y < 1$. Υπολογίστε τη $\mathrm{Var}(X)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|Y)]$.

Λύση

Από το Παράδειγμα 17: $X|Y=y \sim Uniform(0,y)$, άρα:

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \frac{y}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X|Y=y) = \frac{y^2}{12}.$$

Βήμα 1: $\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] = \frac{1}{12}\mathbb{E}[Y^2]$.

$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 6y(1-y)\,dy = 6\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{10}$.
$\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{40}$.
Βήμα 2: $\mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathrm{Var}\left(\frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}(Y)$.
$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y \cdot 6y(1-y)\,dy = 6\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}$.
$\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
$\mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|Y)] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{80}$.
Αποτέλεσμα: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{40} + \frac{1}{80} = \frac{3}{80} = 0{,}0375$.

Έλεγχος

Απευθείας: $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 3(1-x)^2\,dx = \frac{1}{4}$.
$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 3(1-x)^2\,dx = 3\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right] = 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$.
$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{3}{80}$ ✓.

Παράδειγμα 20: Νόμος ολικής διακύμανσης — Οικονομική εφαρμογή

Ο μισθός Y ενός εργαζομένου εξαρτάται από το επίπεδο εκπαίδευσης $X \in \{1,2,3\}$ (Λύκειο, Πτυχίο, Μεταπτυχιακό):

$$P(X=1) = 0{,}4, \quad P(X=2) = 0{,}4, \quad P(X=3) = 0{,}2.$$

$$\mathbb{E}[Y|X=1] = 1000,\ \mathbb{E}[Y|X=2] = 1500,\ \mathbb{E}[Y|X=3] = 2200.$$

$$\mathrm{Var}(Y|X=1) = 10000,\ \mathrm{Var}(Y|X=2) = 22500,\ \mathrm{Var}(Y|X=3) = 40000.$$

Υπολογίστε $\mathbb{E}[Y]$ και $\mathrm{Var}(Y)$.

Λύση

$\mathbb{E}[Y]$ (νόμος ολικής μέσης τιμής):

$$\mathbb{E}[Y] = 1000 \cdot 0{,}4 + 1500 \cdot 0{,}4 + 2200 \cdot 0{,}2 = 400 + 600 + 440 = 1440.$$

$\mathrm{Var}(Y)$ (νόμος ολικής διακύμανσης):
Πρώτος όρος: $\mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] = 10000 \cdot 0{,}4 + 22500 \cdot 0{,}4 + 40000 \cdot 0{,}2 = 21000$.
Δεύτερος όρος: $\mathbb{E}[(\mathbb{E}[Y|X])^2] = 1000^2 \cdot 0{,}4 + 1500^2 \cdot 0{,}4 + 2200^2 \cdot 0{,}2 = 400000 + 900000 + 968000 = 2268000$.
$\mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)] = 2268000 - 1440^2 = 2268000 - 2073600 = 194400$.
$\mathrm{Var}(Y) = 21000 + 194400 = 215400$. $\sigma_Y \approx 464$ ευρώ.

Παρατήρηση

$\mathrm{Var}(Y) = \underbrace{\mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)]}_{\text{εντός ομάδων}} + \underbrace{\mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X)]}_{\text{μεταξύ ομάδων}}$. Εδώ η μεταβλητότητα **μεταξύ** εκπαιδευτικών επιπέδων (194400) υπερτερεί κατά πολύ αυτής **εντός** κάθε επιπέδου (21000): η εκπαίδευση εξηγεί το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης μισθών.

7 Συνδιακύμανση και Ιδιότητες

Παράδειγμα 21: $\mathrm{Cov}(X,Y)$ — Διακριτή περίπτωση

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα πιθανοτήτων του Παραδείγματος 1 (εβδομαδιαία ζήτηση δύο προϊόντων), υπολογίστε τη $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Λύση

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Από τα Παραδείγματα 11 και 1:

$$\mathbb{E}[XY] = 1{,}05, \quad \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0{,}95.$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 1{,}05 - 0{,}95^2 = 1{,}05 - 0{,}9025 = 0{,}1475 > 0.$$

Θετική γραμμική σχέση: πελάτες που ζητούν περισσότερα βασικά προϊόντα τείνουν να ζητούν και περισσότερα πολυτελή.

Παράδειγμα 22: $\mathrm{Cov}(X,Y)$ — Συνεχής περίπτωση

Για τη σ.π.π. $f(x,y) = 6(1-y)$, $0 < x < y < 1$, υπολογίστε τη $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Λύση

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}$, $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$ (Παράδ. 19).

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1\int_0^y xy\cdot 6(1-y)\,dx\,dy = 6\int_0^1 (1-y)\frac{y^2}{2}\cdot y\,dy = 3\int_0^1 (y^3-y^4)\,dy = 3\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right] = \frac{3}{20}.$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{20} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{20} - \frac{1}{8} = \frac{6-5}{40} = \frac{1}{40} = 0{,}025.$$

Παράδειγμα 23: Ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{Cov} = 0$ αλλά όχι αντίστροφα

Έστω $X \sim Uniform(-1,1)$ και $Y = X^2$. Δείξτε ότι $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ αν και οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Λύση

$\mathbb{E}[X] = 0$ (συμμετρία), $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}[X^3] = 0$ (συμμετρία).
$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\cdot X^2] = \mathbb{E}[X^3] = 0$.
$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 - 0\cdot\frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 0$.
Ωστόσο η $Y = X^2$ είναι **πλήρως καθορισμένη** από την X: καθόλου ανεξάρτητες! Η γραμμική συσχέτιση δεν εντοπίζει μη γραμμικές εξαρτήσεις.

Παρατήρηση

Κλασικό αντιπαράδειγμα: $\rho = 0$ δεν σημαίνει ανεξαρτησία. Στη χρηματοοικονομική, μη γραμμικές εξαρτήσεις (π.χ. tail dependence) μπορεί να υπάρχουν ακόμα και όταν $\rho \approx 0$.

Παράδειγμα 24: Ιδιότητες συνδιακύμανσης — Απόδοση χαρτοφυλακίου

Η απόδοση χαρτοφυλακίου είναι $R = 0{,}6X + 0{,}4Y$, όπου $\mathbb{E}[X] = 8\%$, $\mathbb{E}[Y] = 12\%$, $\mathrm{Var}(X) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 25$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 6$.

(α΄) Υπολογίστε $\mathbb{E}[R]$ και $\mathrm{Var}(R)$.

(β΄) Βρείτε $\mathrm{Cov}(X, R)$.

Λύση

(α) $\mathbb{E}[R] = 0{,}6 \cdot 8 + 0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8 + 4{,}8 = 9{,}6\%$.
$\mathrm{Var}(R) = 0{,}36 \cdot 9 + 0{,}16 \cdot 25 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 6 = 3{,}24 + 4{,}00 + 2{,}88 = 10{,}12$.
(β) $\mathrm{Cov}(X, R) = \mathrm{Cov}(X,\ 0{,}6X + 0{,}4Y) = 0{,}6\,\mathrm{Var}(X) + 0{,}4\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 0{,}6 \cdot 9 + 0{,}4 \cdot 6 = 7{,}8$.

Παρατήρηση

Η γραμμικότητα $\mathrm{Cov}(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j) = \sum\sum a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$ είναι θεμελιώδης στη θεωρία χαρτοφυλακίου Markowitz. Η διαφοροποίηση μειώνει τον κίνδυνο ακριβώς όταν $\rho < 1$.

8 Συντελεστής Συσχέτισης

Παράδειγμα 25: Υπολογισμός ρ_{XY} — Διακριτή περίπτωση

Υπολογίστε τον συντελεστή συσχέτισης ρ_{XY} για τα δεδομένα του Παραδείγματος 1.

Λύση

$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot 0{,}30 + 1^2 \cdot 0{,}45 + 2^2 \cdot 0{,}25 = 1{,}45$.
$\mathrm{Var}(X) = 1{,}45 - 0{,}95^2 = 0{,}5475$. Λόγω συμμετρίας: $\mathrm{Var}(Y) = 0{,}5475$.
$\rho_{XY} = \frac{0{,}1475}{\sqrt{0{,}5475 \cdot 0{,}5475}} = \frac{0{,}1475}{0{,}5475} \approx 0{,}269$.

Παράδειγμα 26: Υπολογισμός ρ_{XY} — Συνεχής περίπτωση

Υπολογίστε τον ρ_{XY} για τη σ.π.π. $f(x, y) = 6(1 - y)$, $0 < x < y < 1$.

Λύση

Από τα Παραδείγματα 19 και 22: $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{40}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{80}$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{20}$.

$$\rho_{XY} = \frac{1/40}{\sqrt{(3/80)(1/20)}} = \frac{1/40}{\sqrt{3/1600}} = \frac{1/40}{\sqrt{3}/40} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577.$$

Παρατήρηση

$|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ (τέλεια γραμμική σχέση). $\rho_{XY} = 0 \not\Rightarrow$ ανεξαρτησία. $\rho_{XY} > 0$: θετική γραμμική σχέση. $\rho_{XY} < 0$: αρνητική γραμμική σχέση.

Παράδειγμα 27: ρ σε πίνακα 3×3 — Επισκεψιμότητα

Ο αριθμός πελατών σε πρωινό (X) και βραδινό (Y) ωράριο ενός καταστήματος δίνεται:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,05	0,10	0,15
1	0,05	0,10	0,15
2	0,05	0,10	0,25

Υπολογίστε $\text{Cov}(X, Y)$ και ρ_{XY}.

Λύση

Περιθώριες: $f_X(0) = 0{,}30$, $f_X(1) = 0{,}30$, $f_X(2) = 0{,}40$.
$f_Y(0) = 0{,}15$, $f_Y(1) = 0{,}30$, $f_Y(2) = 0{,}55$.
$\mathbb{E}[X] = 0{,}30 + 0{,}80 = 1{,}10$. $\mathbb{E}[Y] = 0{,}30 + 1{,}10 = 1{,}40$.
$\mathbb{E}[XY] = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}20 + 1{,}00 = 1{,}60$.
$\text{Cov}(X, Y) = 1{,}60 - 1{,}10 \cdot 1{,}40 = 1{,}60 - 1{,}54 = 0{,}06$.
$\mathbb{E}[X^2] = 0{,}30 + 4 \cdot 0{,}40 = 1{,}90$, $\text{Var}(X) = 1{,}90 - 1{,}21 = 0{,}69$.
$\mathbb{E}[Y^2] = 0{,}30 + 4 \cdot 0{,}55 = 2{,}50$, $\text{Var}(Y) = 2{,}50 - 1{,}96 = 0{,}54$.
$\rho_{XY} = \frac{0{,}06}{\sqrt{0{,}69 \cdot 0{,}54}} = \frac{0{,}06}{\sqrt{0{,}3726}} = \frac{0{,}06}{0{,}6104} \approx 0{,}098$.
Πολύ ασθενής θετική συσχέτιση.

9 Ανισότητα Cauchy–Schwarz

Παράδειγμα 28: Εφαρμογή ανισότητας Cauchy–Schwarz

Έστω τ.μ. X, Y με $\mathbb{E}[X^2] = 4$ και $\mathbb{E}[Y^2] = 9$.

(α΄) Βρείτε ένα άνω φράγμα για $|\mathbb{E}[XY]|$.

(β΄) Αν $Y = \frac{3}{2}X$, δείξτε ότι ισχύει ισότητα.

Λύση

(α) $|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.
(β) $Y = \frac{3}{2}X \Rightarrow \mathbb{E}[Y^2] = \frac{9}{4} \cdot 4 = 9$ ✓. $\mathbb{E}[XY] = \frac{3}{2}\mathbb{E}[X^2] = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6 = \sqrt{4 \cdot 9}$.
Ισότητα ισχύει όταν $Y = \alpha X$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Παράδειγμα 29: $|\rho| \leq 1$ μέσω Cauchy–Schwarz

Αποδείξτε ότι $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz.

Λύση

Θέτουμε $U = X - \mathbb{E}[X]$, $V = Y - \mathbb{E}[Y]$. Τότε $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[UV]$.
Από Cauchy–Schwarz: $|\mathbb{E}[UV]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[U^2]\mathbb{E}[V^2]} = \sqrt{\text{Var}(X)\,\text{Var}(Y)} = \sigma_X \sigma_Y$.
Άρα $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y \Rightarrow |\rho_{XY}| = \frac{|\text{Cov}(X,Y)|}{\sigma_X \sigma_Y} \leq 1$. □

10 Διακύμανση Αθροίσματος και Γραμμικοί Συνδυασμοί

Παράδειγμα 30: $\mathrm{Var}(X+Y)$ **εναντίον** $\mathrm{Var}(X-Y)$

Δύο μετοχές έχουν $\mathrm{Var}(X) = 4$, $\mathrm{Var}(Y) = 16$, $\rho_{XY} = 0{,}5$. Υπολογίστε $\mathrm{Var}(X+Y)$ και $\mathrm{Var}(X-Y)$.

Λύση

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 4 = 4$.
$\mathrm{Var}(X+Y) = 4 + 16 + 2 \cdot 4 = 28$.
$\mathrm{Var}(X-Y) = 4 + 16 - 2 \cdot 4 = 12$.
Η θέση αντιστάθμισης $(X - Y)$ μειώνει τη διακύμανση κατά 57% σε σχέση με $X + Y$.

Παράδειγμα 31: Ασφάλιστρο ως γραμμικός συνδυασμός

Ασφαλιστική εταιρεία: το ημερήσιο κόστος αποζημιώσεων αυτοκινήτου (X) και κατοικίας (Y) ικανοποιεί $\mathbb{E}[X] = 200$, $\mathbb{E}[Y] = 150$, $\sigma_X = 50$, $\sigma_Y = 80$, $\rho_{XY} = -0{,}3$. Το συνολικό κόστος είναι $C = X + Y + 100$ (σταθερά λειτουργικά).
Βρείτε $\mathbb{E}[C]$ και σ_C.

Λύση

$\mathbb{E}[C] = 200 + 150 + 100 = 450$.
$\mathrm{Cov}(X,Y) = -0{,}3 \cdot 50 \cdot 80 = -1200$.
$\mathrm{Var}(C) = \mathrm{Var}(X+Y) = 2500 + 6400 + 2(-1200) = 2500 + 6400 - 2400 = 6500$.
$\sigma_C = \sqrt{6500} \approx 80{,}6$.

Παρατήρηση

Η αρνητική συσχέτιση μειώνει τη διακύμανση του αθροίσματος: $\mathrm{Var}(X+Y) = 6500 < 2500 + 6400 = 8900 = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. Αυτό είναι η αρχή της **διαφοροποίησης κινδύνου** στα χρηματοοικονομικά.

Παράδειγμα 32: $\mathrm{Var}(\sum a_i X_i)$ **— Ανεξάρτητες τ.μ.**

Έστω X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες τ.μ. με $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ και $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ για $i = 1, 2, 3$. Βρείτε $\mathrm{Var}(2X_1 - 3X_2 + X_3)$.

Λύση

Ανεξαρτησία $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ για $i \neq j$.
$\mathrm{Var}(2X_1 - 3X_2 + X_3) = 4\sigma_1^2 + 9\sigma_2^2 + \sigma_3^2$.
Αν π.χ. $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 4$, $\sigma_3^2 = 9$: $\mathrm{Var} = 4 + 36 + 9 = 49$, $\sigma = 7$.

11 Πίνακας Διακύμανσης–Συνδιακύμανσης

Παράδειγμα 33: $\alpha^\top \Sigma \alpha$ — Θεωρία χαρτοφυλακίου

Τρεις μετοχές: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$, $\boldsymbol{\mu} = (5, 8, 12)^\top$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 16 \end{pmatrix}.$$

Σταθμίσεις $\boldsymbol{\alpha} = (0{,}5,\ 0{,}3,\ 0{,}2)^\top$. Βρείτε $\mathbb{E}[R]$ και $\mathrm{Var}(R)$ για $R = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{X}$.

Λύση

$\mathbb{E}[R] = 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}3 \cdot 8 + 0{,}2 \cdot 12 = 2{,}5 + 2{,}4 + 2{,}4 = 7{,}3.$

$$\Sigma\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 - 1 \cdot 0{,}2 \\ 2 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 \\ -0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 4{,}3 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Var}(R) = \boldsymbol{\alpha}^\top \Sigma \boldsymbol{\alpha} = 0{,}5 \cdot 2{,}4 + 0{,}3 \cdot 4{,}3 + 0{,}2 \cdot 3{,}6 = 1{,}20 + 1{,}29 + 0{,}72 = 3{,}21.$

Παρατήρηση

Ο τύπος $\sigma_R^2 = \boldsymbol{\alpha}^\top \Sigma \boldsymbol{\alpha}$ είναι η βάση ολόκληρης της θεωρίας Markowitz. Ο πίνακας Σ περιέχει **όλη** την πληροφορία κινδύνου.

Παράδειγμα 34: $\mathrm{Cov}(A\mathbf{X}) = A\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})\,A^\top$

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ με $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $(Y_1 = X_1 + X_2,\ Y_2 = X_1 - X_2)$. Βρείτε $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$.

Λύση

$$A\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Έλεγχος

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = 4 + 9 + 2 \cdot 1 = 15$ ✓. $\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = 4 + 9 - 2 \cdot 1 = 11$ ✓.
$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2,\ X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) - \mathrm{Var}(X_2) = 4 - 9 = -5$ ✓.

Παράδειγμα 35: Σύνθετο — Ασφαλιστικό σενάριο, πλήρης ανάλυση

Μια ασφαλιστική εταιρεία μοντελοποιεί τον αριθμό αιτημάτων αυτοκινήτου (X) και κατοικίας (Y) ανά ημέρα:

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0,10	0,15	0,05
1	0,05	0,20	0,15
2	0,02	0,08	0,20

(α΄) Βρείτε τις περιθώριες κατανομές.

(β΄) Υπολογίστε $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

(γ΄) Υπολογίστε $\mathrm{Cov}(X,Y)$ και ρ_{XY}.

(δ΄) Βρείτε $\mathbb{E}[Y|X=2]$ και $\mathrm{Var}(Y|X=2)$.

(ε΄) Το μέσο κόστος ανά ημέρα είναι $C = 500X + 300Y + 200$ ευρώ. Βρείτε $\mathbb{E}[C]$ και σ_C.

Λύση

(α) $f_X(0) = 0{,}30,\ f_X(1) = 0{,}40,\ f_X(2) = 0{,}30.$
$f_Y(0) = 0{,}17,\ f_Y(1) = 0{,}43,\ f_Y(2) = 0{,}40.$
Έλεγχος: $0{,}30 + 0{,}40 + 0{,}30 = 1\ \checkmark,\ \ 0{,}17 + 0{,}43 + 0{,}40 = 1\ \checkmark.$
(β)

$$\mathbb{E}[X] = 0{,}40 + 0{,}60 = 1{,}00, \quad \mathbb{E}[X^2] = 0{,}40 + 1{,}20 = 1{,}60, \quad \mathrm{Var}(X) = 1{,}60 - 1 = 0{,}60.$$
$$\mathbb{E}[Y] = 0{,}43 + 0{,}80 = 1{,}23, \quad \mathbb{E}[Y^2] = 0{,}43 + 1{,}60 = 2{,}03, \quad \mathrm{Var}(Y) = 2{,}03 - 1{,}5129 = 0{,}5171.$$

(γ)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= 1\cdot1\cdot0{,}20 + 1\cdot2\cdot0{,}15 + 2\cdot1\cdot0{,}08 + 2\cdot2\cdot0{,}20\\ &= 0{,}20 + 0{,}30 + 0{,}16 + 0{,}80 = 1{,}46.\end{aligned}$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 1{,}46 - 1{,}00 \cdot 1{,}23 = 0{,}23.$
$\rho_{XY} = \frac{0{,}23}{\sqrt{0{,}60\cdot0{,}5171}} = \frac{0{,}23}{\sqrt{0{,}3103}} = \frac{0{,}23}{0{,}557} \approx 0{,}413.$
(δ) $f_X(2) = 0{,}30$. Δεσμευμένη σ.π.:
$f_{Y|X}(0|2) = \frac{0{,}02}{0{,}30} = \frac{1}{15},\ f_{Y|X}(1|2) = \frac{0{,}08}{0{,}30} = \frac{4}{15},\ f_{Y|X}(2|2) = \frac{0{,}20}{0{,}30} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$
$\mathbb{E}[Y|X=2] = \frac{4}{15} + \frac{20}{15} = \frac{24}{15} = 1{,}60.$
$\mathbb{E}[Y^2|X=2] = \frac{4}{15} + \frac{40}{15} = \frac{44}{15} \approx 2{,}933.$
$\mathrm{Var}(Y|X=2) = 2{,}933 - 2{,}56 = 0{,}373.$
(ε) $\mathbb{E}[C] = 500 + 300 \cdot 1{,}23 + 200 = 500 + 369 + 200 = 1069$ ευρώ.
$\mathrm{Var}(C) = 500^2 \cdot 0{,}60 + 300^2 \cdot 0{,}5171 + 2 \cdot 500 \cdot 300 \cdot 0{,}23$
$= 150000 + 46539 + 69000 = 265539.$
$\sigma_C = \sqrt{265539} \approx 515$ ευρώ.

Παράδειγμα 36: Πλήρης ανάλυση — Συνεχής σ.π.π.

Τα ποσά (σε χιλ. ευρώ) που ξοδεύει ένα νοικοκυριό σε τρόφιμα (X) και μεταφορές (Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

(α΄) Επαληθεύστε ότι η f είναι σ.π.π.

(β΄) Βρείτε τις περιθώριες. Εξετάστε ανεξαρτησία.

(γ΄) Υπολογίστε $\text{Cov}(X, Y)$ και ρ_{XY}.

(δ΄) Βρείτε $f_{Y|X}(y|x)$ και $\mathbb{E}[Y|X = x]$.

Λύση

(α)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y^2\right] dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1. \checkmark$$

(β) $f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\, dy = \frac{3x^2+1}{2}$, $0 < x < 1$.
Συμμετρία: $f_Y(y) = \frac{3y^2+1}{2}$.
Δεν παραγοντοποιείται: $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{(3x^2+1)(3y^2+1)}{4} \neq \frac{3(x^2+y^2)}{2} = f(x, y)$.
Δεν είναι ανεξάρτητες.
(γ) $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot \frac{3x^2+1}{2}\, dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$. $\mathbb{E}[Y] = \frac{5}{8}$ (συμμετρία).
$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3x^2+1}{2}\, dx = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}$.
$\text{Var}(X) = \frac{7}{15} - \frac{25}{64} = \frac{448-375}{960} = \frac{73}{960}$.
$\mathbb{E}[XY] = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 (x^3y + xy^3)\, dx\, dy = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
$\text{Cov}(X, Y) = \frac{3}{8} - \frac{25}{64} = \frac{24-25}{64} = -\frac{1}{64}$.
$\rho_{XY} = \frac{-1/64}{73/960} = -\frac{960}{64 \cdot 73} = -\frac{15}{73} \approx -0{,}205$.
(δ) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{3(x^2+y^2)}{3x^2+1}$, $0 < y < 1$.

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \frac{3}{3x^2 + 1}\int_0^1 (x^2y + y^3)\, dy = \frac{3}{3x^2 + 1}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right] = \frac{3(2x^2 + 1)}{4(3x^2 + 1)}.$$